B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Diese Sammlung bietet in einzelnen in sich abgeschlossenen Werken zusammenfassende Darstellungen der wichtigsten Abschnitte der mathematischen Wissenschaften und deren Anwendungen. Im einzelnen wollen diese Werke in ihrer ausführlichen, neben der rein wissenschaftlichen auch pädagogische Momente berücksichtigenden Darstellung die Möglichkeit zu selbständi... ...hängigem Eindringen ... ...esamtheit aber sollen sie ... ...hen Nachweise ein gena... ...n dem gegenwärtigen ... ...nd ihrer Anwendunge...

Bisher ... ...n usw. ver-

P. Bachr... ...u. 2.] I. Band. X, 402... n. ℳ 17.—
E. Blasc... Lehre von den statisti... [Bd. XXXIII.]
H. Brun... ...re. VIII, 810 S. und A...
G. H. Br... dealing mainly with ... 204 S. 1907. n. ℳ 7...
E. Czube... auf Fehlerausgleich... ...n. [Bd. IX, 1 u. 2.]
I. Band ... ...lehre. X, 410 S.
II. — ... ...sicherung. X, 470 S.
L. E. Di... ...is Field theory. X, 312...
F. Dinge... ...Differential- und Integr...
I. Teil. ...
II. — ...
O. Fisch... ...ebenden Körper mit sp... ...ige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. X, 372 S. 1906. n. ℳ 14.—. [Bd. XXII.]
Ph. Forchheimer, Lehrbuch der Hydraulik. 1913. [ca. 400 S.] [Bd. XXXIX.]
A. Gleichen, Lehrb. d. geometrisch. Optik. XIV, 511 S. 1902. n. ℳ 20.— [Bd. VIII.]
L. Henneberg, graphische Statik der starren Systeme. XV, 782 S. 1911. n. ℳ 24.—. [Bd. XXXI.]
A. Krazer, Lehrbuch d. Thetafunktionen. XXIV, 509 S. 1903. n. ℳ 24.—. [Bd. XII.]
H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von Joh. Friedel. XVI, 787 S. 1907. n. ℳ 20.—. [Bd. XXVI.]
R. von Lilienthal, Vorles. üb. Differentialgeometrie. [Bd. XXVIII, 1 u. 2.] In 2 Bd.
I. Band. Kurventheorie. VI, 368 S. 1908. n. ℳ 12.—
II. — I. Teil: Flächentheorie. VIII, 236 S. 1913. n. ℳ 13.—
H. A. Lorentz, on the Theory of Electrons and its Applications to the Pheno... ...and Radiant Heat. IV, 332 S. 1909. n. ℳ 9.—. (Englisch.) [Bd. XXIX.]

Unter der Presse (*) bez. in Vorbereitung:

M. Bôcher, über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

H. Broecker, Lehrbuch der Versicherungsmathematik.

G. Castelnuovo und **F. Enriques**, Theorie der algebraischen Flächen.

M. Dehn und **P. Heegaard**, Lehrbuch der Analysis situs.

***F. Dingeldey**, Lehrbuch der analytischen Geometrie.

—— Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.

G. Eneström (in Verbindung mit anderen Gelehrten), Handbuch der Geschichte der Mathematik.

F. Engel, Einführung in die Theorie der Transformationsgruppen.

F. Enriques, Prinzipien der Geometrie.

J. Fredholm, die Integralgleichungen und ihre Anwendung auf die mathematische Physik.

R. Fueter, komplexe Multiplikation.

Ph. Furtwängler, die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen.

M. Grübler, Lehrbuch der hydraulischen Motoren.

J. Grünwald, Abriß einer Geometrie der orientierten Linienelemente in der Ebene.

J. Harkness, elliptische Funktionen.

G. Herglotz, Lehrbuch der Kugel- und verwandter Funktionen.

P. Hertz, Lehrbuch über statistische Mechanik.

K. Heun u. **v. Mises**, die kinetischen Probleme der modernen Maschinenlehre.

G. Jung, Geometrie der Massen.

H. Lamb, Akustik.

G. Landsberg, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Auflösung der Gleichungen.

***R. von Lilienthal**, Vorlesungen über Differentialgeometrie. In 2 Bänden. II. Bd. 2. Teil.

A. Loewy, Vorlesungen über die Theorie der linearen Substitutionsgruppen.

H. A. Lorentz, die Elektronentheorie und ihre Anwendung auf die Erscheinungen des Lichtes und der strahlenden Wärme. Aus dem Englischen übersetzt.

***R. Mehmke**, Vorlesungen üb. Vektoren- u. Punktrechnung. In 2 Bänden. I, 2. II.

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. II. Band.

A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. In 2 Bänden.

C. Segre, Vorlesungen über algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der mehrdimensionalen Räume.

P. Stäckel, Lehrbuch der allgemeinen Dynamik.

—— Differentialgeometrie höherer Mannigfaltigkeiten.

K. Th. Vahlen, Elemente der höheren Algebra.

A. Voss, Prinzipien der rationellen Mechanik.

—— Abbildung und Abwicklung der krummen Flächen.

***A. G. Webster**, Lehrbuch der Dynamik, als Einführung in die theoretische Physik. Deutsche Ausgabe von C. H. Müller. In 2 Teilen.

A. Wiman, endliche Gruppen linearer Transformationen.

W. Wirtinger, algebraische Funktionen und ihre Integrale.

—— partielle Differentialgleichungen.

***H. G. Zeuthen**, die abzählenden Methoden der Geometrie.

☞ Nähere Angaben über obige Werke befinden sich in meinen „Mitteilungen" bzw. mathematischen Katalogen, die ich zu verlangen bitte. Verlagsanerbieten für die Sammlung werden mir jederzeit willkommen sein.

Leipzig, Poststr. 3. **B. G. Teubner.**

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXXVIII

ANALYTISCHE GEOMETRIE DER KUBISCHEN KEGELSCHNITTE

VON

DR. OTTO STAUDE
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

MIT 58 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

Vorwort.

Das vorliegende Buch enthält eine *unabhängige Einzeldarstellung* der Haupteigenschaften der kubischen Kegelschnitte nach analytischer Methode.[1])

Es setzt keine anderen Vorkenntnisse voraus als die Lehre von den verschiedenen Koordinatensystemen[2]) im Raume und einige Sätze über die Flächen 2. Ordnung[3]), wie sie in den meisten einführenden Werken und Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes dargeboten werden.

Die aus dem Inhaltsverzeichnis ersichtliche Anordnung des Stoffes mag vorweg noch mit einigen Worten näher erläutert und begründet werden.

Im I. Abschnitt wird im I. Kapitel der kub. Kegelschnitt als Durchschnitt von Kegel und Zylinder eingeführt und daraus gleichzeitig seine Darstellung durch zwei Gleichungen § 1, 2, durch einen Parameter § 1, 3 und durch Zeichnung § 1, 4 erhalten, worauf sogleich seine Einteilung in vier Arten § 2, 7 folgt. Die ursprünglichen analytischen Darstellungen werden durch Drehung des Koordinatensystems und Änderung des Parameters auf die einfachere Form § 3, 5 gebracht. Die allgemeine Raumkurve 3. O. wird in § 4, 1—4 als solche, die in jeder Ebene drei Punkte hat, erklärt und zuerst durch

1) Ein solches Buch dürfte wohl als ein Bedürfnis anerkannt werden, nachdem die „Einleitung in die Theorie der kub. Kegelschnitte" von C. A. v. Drach, Leipzig bei B. G. Teubner, 1867, die sich ganz an L. Cremonas grundlegende analytische Untersuchungen anschloß, soeben vergriffen ist.

2) Der Vollständigkeit wegen ist an den betreffenden Stellen unter „I § . ." auf mein kleines Buch: *„Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene"*, Leipzig 1905, verwiesen, welches seinem Zwecke gemäß das Handwerkszeug für analytisch geometrische Untersuchungen gebrauchsfertig zusammenstellt und gerade die hier erforderlichen Hilfsmittel darbietet.

3) In dieser Hinsicht ist an vereinzelten Stellen unter „II § . ." auf mein Buch: *„Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche 2. Ordnung"*, Leipzig 1910, verwiesen, von dem jedoch das vorliegende Buch wesentlich unabhängig ist. Einige wenige Artikel mit weitergehenden Voraussetzungen sind durch kleineren Druck als überschlagbar gekennzeichnet.

Änderung des Parameters in die Gestalt § 4, **9** versetzt, sodann wird durch Änderung des Koordinatensystems die Form § 5, **4** der Parameterdarstellung herbeigeführt. In § 6, **4**; **6** ergibt sich dann einerseits die Übereinstimmung der kub. Kegelschnitte und der Raumkurven 3. O., anderseits aber eine *endgültige* analytische Darstellung in *rechtwinkligen Koordinaten* § 6, **9**, die weiterhin als Grundlage dient.

An sie anschließend, werden im II. Kapitel in § 7 die Schmiegungsebenen und Asymptotenebenen, in § 8 die Tangenten und Asymptoten, neben den Sehnen und Achsen der Raumkurve 3. O. behandelt, auch auf die Polarentheorie und den linearen Komplex der Kurve, sowie ihren Schraubensinn hingewiesen. In § 9 werden die Sehnenkegel und Sehnenzylinder und schließlich das Bündel aller Flächen 2. O. durch die Raumkurve hergestellt, während § 10 den zu den Sehnenkegeln dualen Achsenkegelschnitten, ihrem Mittelpunktskegelschnitt und der zu dem Bündel des § 9 dualen Scharschar gewidmet ist. In § 11 werden im Anschluß an den Begriff der Scheitelpunkte der Kurve deren sonstige Scheitelelemente, vor allem die Scheiteldurchmesser, untersucht und in § 12 das für die einzelnen Arten mehr oder minder charakteristische *schiefwinklige System der Scheitelelemente* eingeführt. Wenn dieses auch das nach Cremonas Vorgang bisher gebräuchlichste ist und gegenüber dem rechtwinkligen eine weit größere Einfachheit der analytischen Formeln herbeiführt, so sind doch für die Bevorzugung des rechtwinkligen Systems abgesehen davon, daß es dem Anfänger vertrauter ist, zwei Gründe maßgebend geworden. Erstens, daß die in rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Formeln formell die umfassenderen sind und die für die schiefwinkligen geltenden als Sonderfälle § 12, **4** einschließen; zweitens, daß sich auf die einheitliche Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten ein in gleicher Vollständigkeit bisher nicht vorliegendes *System der analytischen Unterscheidung aller Unterarten* des kub. Kegelschnittes gründet. Ist dieser nämlich in der allgemeinen Form § 6, (14) gegeben, so findet sich in § 9, (47) die Bedingung für die gleichseitige kub. Hyperbel, in § 10, (36) die kub. Hyperbel mit Mittelpunktskreis, in § 21, (10) für die allgemeine und § 21, (14) für die spezielle gleichwinklige, in § 21, (15) für die zugleich gleichseitige und gleichwinklige kub. Hyperbel; ferner in § 10, (38) für die kub. Ellipse mit gleichseitiger Hyperbel als Mittelpunktskegelschnitt, in § 16, (4) für die kub. Ellipse mit Rotationszylinder und Rotationshyperboloid, in § 16, (16) mit nur einer Rotationsfläche, die wiederum in § 16, (21) ein Rotationskegel und in § 16, (25) ein Rotationszylinder sein kann; findet sich ferner in § 22, (53) die Bedin-

gung für die rechtwinklige kub. hyperbolische Parabel und in § 23, (39) für die kub. Parabel mit Direktrix, in § 16, (31) mit Rotationskegel.

Mit einem Teil dieser Unterarten ist schon auf das III. Kapitel übergegriffen, in welchem die *Gleichungen* der Rotationsflächen, die durch einen kub. Kegelschnitt gehen, in rechtwinkligen Koordinaten zum ersten Mal wirklich entwickelt und nach ihren verschiedenen Formen untersucht sind, bevor sie in wesentlich einfacherer Gestalt in schiefwinkligen Koordinaten in § 20, **26** und § 22, **15** wieder erscheinen.

Im IV. Kapitel werden die vier Arten der kub. Kegelschnitte im Einzelnen behandelt, zunächst wiederum in rechtwinkligen Koordinaten. Sodann aber wird für jede Art ein „natürliches" schiefwinkliges System eingeführt, welches für sie eindeutig und charakteristisch ist und die Grundlage für die einfachste Gestaltbeschreibung bietet (s. die Figuren S. 94; 118; 134; 141). Unter diesen dürfte das *natürliche System der kub. Hyperbel* in der hier gegebenen Form und Ausführung neu sein. Es gestattet nicht nur eine in den drei schiefwinkligen Koordinaten x, y, z vollkommen symmetrische Darstellung aller Bestandteile der kub. Hyperbel § 20, (2); (4); (6)—(9); (11)—(14); (38); (40), sowie des zugehörigen linearen Komplexes § 20, (17) und Polarsystems § 20, (18); (19), sondern bringt auch die der kub. Hyperbel eigentümliche Doppelpyramidengruppe § 20, **18** unmittelbar zum Ausdruck. Dies tritt besonders bei der gleichwinkligen kub. Hyperbel § 21, **6** und ihrem Flächenbündel § 21, **7** hervor, wo die eine der vier Rotationsflächen § 21, (30) gegen die Gruppe invariant ist.

Im II. Abschnitt im I. Kapitel werden die Bestandteile der Raumkurve 3. O., also Schmiegungsebenen § 24, Tangenten § 25, Sehnen und Achsen § 26, Treff- und Streichlinien, sowie Schmiegungsstrahlen § 27, in *Tetraederkoordinaten* behandelt, und zwar bezogen auf das in § 28 näher beschriebene *Schmiegungstetraeder*. In § 29 wird ebenso das Polarsystem der Raumkurve und des zugehörigen linearen Komplexes untersucht und in § 30 auf die Doppelverhältnisse und Involutionen von Punkten der Kurve hingewiesen. Neben den auf ein Schmiegungstetraeder bezogenen Entwicklungen werden aber auch die für ein *völlig allgemeines* Koordinatentetraeder gültigen *zusammengehörigen* Darstellungen der Punkte § 24, (1), Schmiegungsebenen § 24, (1'), Tangenten § 25, (4), des linearen Komplexes § 25, (9) und § 29, **14** und seines Polarsystems § 29, **13**; **15** aufgestellt.

Im II. Kapitel werden in § 31 die durch die Raumkurve 3. O. gehenden Flächen 2. O. und ihre Erzeugenden betrachtet. Alsdann

folgt die Theorie der konjugierten Punkte und Ebenen, einerseits im Anschluß an das Flächenbündel 2. O. § 32, **1—9** und anderseits an den Polkegelschnitt einer Ebene § 32, **10—11**, folgen ferner die algebraischen Beziehungen der Parameter konjugierter Elemente in § 33, **1—8** und der Zusammenhang mit der Theorie der Harmonikale eines Dreiecks in § 33, **9—11**. Auf die Theorie der konjugierten Elemente stützt sich eine *neue Darstellung* § 34, (33) der allgemeinen kub. Raumkurve und des Flächenbündels § 34, (34), welche in den Verhältnissen $x_1 : x_4$, $x_2 : x_4$, $x_3 : x_4$ symmetrisch ist und die zu einer beliebigen Ebene gehörige Doppelpyramidengruppe der Raumkurve § 34, **14** unmittelbar erkennen läßt. Die entsprechende Parameterdarstellung § 34, (46); (47) zeigt die vollkommenste Symmetrie. Wird die dabei ausgezeichnete Ebene die unendlich ferne Ebene, so erhält man wieder das natürliche System der kub. Hyperbel. In § 35 wird der Übergang von den auf ein Schmiegungstetraeder bezüglichen Tetraederkoordinaten zu dem rechtwinkligen System und die Entstehung der Scheitelelemente aus der zur unendlich fernen Ebene konjugierten gezeigt.

Im III. Kapitel werden in § 36 die projektiven Erzeugungen der Raumkurve 3. O. in kurzer Übersicht analytisch dargestellt, in § 37 ihre Konstruktion aus sechs Punkten, die Beziehung zwischen sieben ihrer Punkte und die zu einem einbeschriebenen Sechseck gehörige Sehne erwähnt, endlich in § 38 der Begriff des Gegenpunktes von vier Punkten der Raumkurve entwickelt.

Mit Rücksicht auf den beabsichtigten Umfang des Buches ist somit weniger eine in jeder Beziehung erschöpfende Darstellung des Gegenstandes, als vielmehr eine zuverlässige Grundlage sowohl für Übungsaufgaben, als auch für weitergehende analytische Entwicklungen über kub. Kegelschnitte angestrebt worden.

Auf die wichtigsten Quellenschriften ist gelegentlich hingewiesen worden.

Besonderer Dank gebührt der Firma B. G. Teubner, welche keine Mühe gescheut hat, um den Text und namentlich die Figuren aufs Sorgfältigste wiederzugeben.

Möchte das kleine Buch dazu beitragen, den kub. Kegelschnitten in den akademischen Vorlesungen und Übungen neben den ebenen Kegelschnitten einen gleichberechtigten Platz zu sichern.

Rostock, den 25. April 1913.

Staude.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt: Behandlung der Raumkurve 3. Ordnung in recht- und schiefwinkligen Koordinaten.

I. Kapitel. Begriff des kubischen Kegelschnittes und Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten.

II. Kapitel. Bestandteile des kub. Kegelschnittes.

III. Kapitel. Die Rotationsflächen der kub. Kegelschnitte.

IV. Kapitel. Die einzelnen Arten der kub. Kegelschnitte.

II. Abschnitt: Behandlung der Raumkurve 3. Ordnung in Tetraederkoordinaten.

I. Kapitel. Bestandteile der Raumkurve 3. Ordnung.

II Kapitel. Raumkurve 3. Ordnung und Fläche 2. Ordnung.

III. Kapitel. Erzeugung und Beziehung zwischen Punkten der Raumkurve 3. Ordnung.

I. Abschnitt.

Behandlung der Raumkurve dritter Ordnung in recht- und schiefwinkligen Koordinaten.

I. Kapitel.

Begriff des kubischen Kegelschnittes und Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten.

§ 1. Der kub. Kegelschnitt als Durchschnitt von Kegel und Zylinder.

1. Erklärung des kub. Kegelschnittes. Ein *Kegel* und ein *Zylinder*, beide von der *zweiten Ordnung*, sollen *eine gerade Erzeugende* miteinander *gemein* haben. Die Kurve, in welcher der Kegel *außerdem* von dem Zylinder geschnitten wird, heißt ein *kubischer* oder *räumlicher Kegelschnitt.*[1])

2. Darstellung durch zwei Gleichungen. Wählt man die Spitze des Kegels als Anfangspunkt O und die gemeinsame Erzeugende als x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems $Oxyz$, so sind die *Gleichungen von Kegel und Zylinder* in homogenen gemeinen Koordinaten x, y, z, t (I § 47, **1**) im allgemeinen von der Form (I § 72, (16); (14)):

$$a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{31}zx = 0, \tag{1}$$

$$b_{22}y^2 + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 + 2b_{24}yt + 2b_{34}zt = 0. \tag{2}$$

Beide Flächen gehen durch die x-Achse $y = 0$, $z = 0$. Ihre Determinanten (I Anm. 1, II (1)):

$$A = 2a_{23}a_{31}a_{12} - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2, \tag{3}$$

$$B = 2b_{23}b_{24}b_{34} - b_{22}b_{34}^2 - b_{33}b_{24}^2 \tag{4}$$

$(a_{23} = a_{32},\ b_{23} = b_{32}, \ldots)$ sollen nicht verschwinden, so daß (vgl. unter **5**):

$$A \neq 0,\ B \neq 0. \tag{5}$$

---

1) Fr. Seydewitz, Arch. Math. Phys. 10 (1847), S. 207; L. Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 164; H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 37; v. Staudt, Beiträge (1860), S. 299.

Die den beiden Gleichungen (1) *und* (2) *zugleich genügenden Punkte, mit Abzug der x-Achse, bilden den kub. Kegelschnitt.*

3. Parameterdarstellung mittels eines Ebenenbüschels. Eine durch die x-Achse gelegte Ebene:

$$y = \lambda z, \tag{6}$$

mit beliebigem Parameter λ, schneidet den *Zylinder* (2), außer in der x-Achse, noch *in einer Geraden h,* die der x-Achse parallel ist, und den *Kegel* (1), außer in der x-Achse, noch *in einer Geraden k,* die durch O geht. Sie hat daher mit dem kub. Kegelschnitt, von Punkten der x-Achse abgesehen, nur den Schnittpunkt P der Geraden h und k gemein.

Für *die Gerade h* folgt aus (6) und (2) zunächst:

$$(b_{22}\lambda^2 + 2b_{23}\lambda + b_{33})z^2 + 2(b_{24}\lambda + b_{34})zt = 0$$

und, mit Weglassung des Faktors z, dessen Verschwinden nach (6) auf die x-Achse führt:

$$\frac{z}{t} = -2\frac{b_{24}\lambda + b_{34}}{b_{22}\lambda^2 + 2b_{23}\lambda + b_{33}}, \tag{7}$$

wonach aus (6):

$$\frac{y}{t} = -2\frac{(b_{24}\lambda + b_{34})\lambda}{b_{22}\lambda^2 + 2b_{23}\lambda + b_{33}}. \tag{8}$$

Für *die Gerade k* folgt aus (6) und (1):

$$(a_{22}\lambda^2 + 2a_{23}\lambda + a_{33})z^2 + 2(a_{12}\lambda + a_{13})zx = 0$$

und, wieder mit Weglassung des Faktors z:

$$\frac{x}{z} = -\frac{a_{22}\lambda^2 + 2a_{23}\lambda + a_{33}}{2(a_{12}\lambda + a_{13})}, \quad \frac{y}{z} = \lambda. \tag{9}$$

Für den *Schnittpunkt P der beiden Geraden h* in (7), (8) und k in (9) wird daher mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

$$\begin{cases} \varrho x = (a_{22}\lambda^2 + 2a_{23}\lambda + a_{33})(b_{24}\lambda + b_{34}), \\ \varrho y = -2(a_{12}\lambda + a_{13})(b_{24}\lambda + b_{34})\lambda, \\ \varrho z = -2(a_{12}\lambda + a_{13})(b_{24}\lambda + b_{34}), \\ \varrho t = (a_{12}\lambda + a_{13})(b_{22}\lambda^2 + 2b_{23}\lambda + b_{33}). \end{cases} \tag{10}$$

Jeder Ebene λ des Büschels (6) entspricht hiernach ein Punkt P des kub. Kegelschnittes, und die Formeln (10) bestimmen (vgl. unter **5**) die Verhältnisse der homogenen Koordinaten des Punktes. Läßt man λ von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen, erhält man alle Punkte des kub. Kegelschnittes.

Die Gleichungen (10) *enthalten die Parameterdarstellung des kub. Kegelschnittes, welcher der übrige Durchschnitt der längs der x-Achse sich schneidenden Flächen* (1) *und* (2) *ist.*

4. Darstellung in schiefer Projektion. Der Ableitung der *Parameterdarstellung* unter **3** entspricht genau die *Zeichnung* des kub. Kegelschnittes.

In Fig. 1 sind die kongruenten Leitkurven OHH_2 und $O'H'H'_2$ des Zylinders (2) in den beiden parallelen zur x-Achse senkrechten Ebenen Oyz und $O'y'z'$ in schiefer Parallelprojektion dargestellt. Von dem Kegel (1) enthält Fig. 1 die Spitze O und die in der Ebene $O'y'z'$ liegende Leitkurve $O'K_1'K'$. Irgendeine in der Ebene $O'y'z'$ durch O' gelegte Gerade schneidet die in derselben Ebene liegenden Leitkurven in H' und K'. Die durch H' zur x-Achse gezogene Parallele $h = H'H$ ist die Schnittlinie (7), (8) der Ebene $OO'H'$, einem Werte λ in (6) entsprechend, mit dem Zylinder (2); die Verbindungslinie k von K' mit O ist die in derselben Ebene $OO'HH'KK'$ liegende Erzeugende (9) des Kegels (1). Der Schnittpunkt P der Geraden h und k ist ein Punkt des kub. Kegelschnittes.

Fig. 1.

Bei Drehung der Geraden $O'H'K'$ um O' erhält man in derselben Weise weitere Punkte der Kurve. In Fig. 1 ist sie in O und Q' zugleich mit dem Zylinder durch die Ebenen Oyz und $O'y'z'$ abgeschnitten.

5. Bedingung für Kegel und Zylinder. Wir setzen die Determinante der Koeffizienten von $\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1$ in den Ausdrücken (10) von Null verschieden voraus (s. § 4, **1—3**), also:

$$(11)\quad D = 4\begin{vmatrix} a_{22}b_{24} & a_{22}b_{34} + 2a_{23}b_{24} & a_{33}b_{24} + 2a_{23}b_{34} & a_{33}b_{34} \\ a_{12}b_{24} & a_{12}b_{34} + a_{13}b_{24} & a_{13}b_{34} & 0 \\ 0 & a_{12}b_{24} & a_{12}b_{34} + a_{13}b_{24} & a_{13}b_{34} \\ a_{12}b_{22} & a_{13}b_{22} + 2a_{12}b_{23} & a_{12}b_{33} + 2a_{13}b_{23} & a_{13}b_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

oder entwickelt:

$$(12)\qquad D = 4AB(a_{13}b_{24} - a_{12}b_{34}) \neq 0.$$

Dies bedeutet zunächst, wie schon in (5) angenommen, daß (1) ein *eigentlicher* (nicht zerfallender) Kegel und (2) ein *eigentlicher* (elliptischer, hyperbolischer oder parabolischer) Zylinder sei.

6. Ausschluß der Berührung. Die Tangentialebene der Fläche (1) oder (2) in irgendeinem Punkte x_0, y_0, z_0, t_0 hat die Gleichung:

$$(13)\quad (a_{12}y_0+a_{13}z_0)x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0)y+(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0)z=0,$$

bezüglich:

$$(14)\quad (b_{22}y_0+b_{23}z_0+b_{24}t_0)y+(b_{32}y_0+b_{33}z_0+b_{34}t_0)z+(b_{42}y_0+b_{43}z_0)t=0.$$

Längs der gemeinsamen Erzeugenden, etwa im Punkte $x_0=1$, $y_0=0$, $z_0=0$, $t_0=1$, *sind daher die Tangentialebenen des Kegels* (1) *und des Zylinders* (2):

$$(15)\quad a_{21}y+a_{31}z=0, \qquad (16)\quad b_{24}y+b_{34}z=0.$$

Die Bedingung:

$$(17)\quad a_{13}b_{24}-a_{12}b_{34}\neq 0$$

in (12) bedeutet also, daß *die Tangentialebenen von Kegel und Zylinder längs der gemeinsamen Erzeugenden nicht zusammenfallen dürfen.*[1])

§ 2. Unterscheidung der kub. Kegelschnitte nach ihren unendlich fernen Punkten.

1. Die beiden auf der gemeinsamen Erzeugenden liegenden Kurvenpunkte. Mit der Bedingung § 1, (11) können die rechten Seiten der Gleichungen § 1, (10) für keinen Wert von λ gleichzeitig verschwinden. Daher *enthält jede Ebene λ des Ebenenbüschels* § 1, (6) *immer einen und nur einen Punkt P des kub. Kegelschnittes*, dessen Koordinaten in der Weise § 1, (10) von λ abhängen. Er ist der Schnittpunkt der beiden Geraden h und k, welche die Ebene λ ($OO'HH'KK'$ Fig. 1 und im Ausschnitt Fig. 2) außer der x-Achse noch mit dem Zylinder und dem Kegel gemein hat.

Zwei besondere Lagen der Ebene λ sind dabei hervorzuheben. Wird die Ebene § 1, (6) mit $\lambda=-b_{34}:b_{24}$ die *Tangentialebene* § 1, (16) *des Zylinders*, indem $O'H'K'$ die Tangente $t=O'K_1'$ seiner Leitkurve in der Ebene $O'y'z'$ (Fig. 1) wird, so fällt ihre Schnittlinie $h=h_1$ mit dem Zylinder in die x-Achse hinein und der Schnittpunkt P von h_1 und k_1 in O (Fig. 3). In der Tat geben die Gleichungen § 1, (10) mit:

$$b_{24}\lambda+b_{34}=0:x,y,z,t=0,0,0,1.$$

Wird die Ebene § 1, (6) mit $\lambda=-a_{31}:a_{12}$ die *Tangentialebene* § 1, (15) *des Kegels*, indem $O'H'K'$ die Tangente $s=O'H_2'$ seiner Leitkurve in der Ebene $O'y'z'$ (Fig. 1) wird, so fällt ihre Schnittlinie

---

1) Fr. Seydewitz, Arch. Math. Phys. 10 (1847), S. 211.

$k = k_2$ mit dem Kegel in die x-Achse hinein und der Schnittpunkt P der Parallelen h_2 und k_2 wird *unendlich fern* (Fig. 4). In der Tat geben die Gleichungen § 1, (10) mit:

$$a_{12}\lambda + a_{13} = 0 : x, y, z, t = 1, 0, 0, 0.$$

Den beiden Tangentialebenen von Kegel und Zylinder längs der gemeinsamen Erzeugenden entsprechen als Punkte der Kurve: der Koordinatenanfangspunkt (die Spitze des Kegels) und der unendlich ferne Punkt der x-Achse (die Spitze des Zylinders).[1])

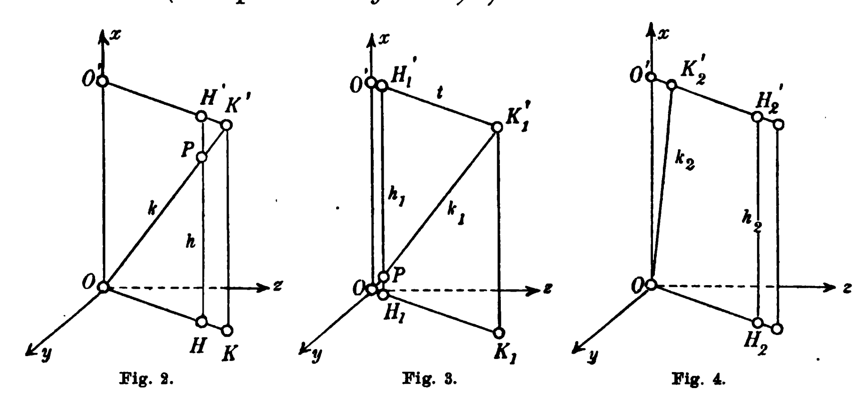


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

2. Entstehung der drei unendlich fernen Punkte. Der in einer Ebene § 1, (6) enthaltene Punkt P des kub. Kegelschnittes ist der Schnittpunkt der in der Ebene liegenden Erzeugenden h und k des Zylinders und Kegels (Fig. 2). Er kann auf zwei Weisen unendlich fern werden: *erstens,* wenn k parallel zu h wird, was nach **1** nur für die Tangentialebene:

$$a_{12}y + a_{13}z = 0 \tag{1}$$

des Kegels längs der x-Achse eintritt (Fig. 4); *zweitens,* wenn die Gerade h (Fig. 2) selbst ins Unendliche fällt. Dies trifft für diejenigen beiden Ebenen § 1, (6) zu, welche die x-Achse mit den beiden unendlich fernen Geraden des Zylinders § 1, (2) verbinden, also seinen Asymptotenebenen parallel sind. Es sind die Ebenen des Ebenenpaares:

$$b_{22}y^2 + 2\,b_{23}yz + b_{33}z^2 = 0. \tag{2}$$

Die drei Ebenen (1) und (2) entsprechen nach § 1, (6) in der Tat gerade den drei Werten des Parameters λ, für die in § 1, (10) t verschwindet, den drei Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$(a_{12}\lambda + a_{13})\,(b_{22}\lambda^2 + 2\,b_{23}\lambda + b_{33}) = 0. \tag{3}$$

---

1) O. Hesse, J. f. Math. 26 (1843), S. 150; Werke, S. 76.

Der kub. Kegelschnitt hat also im allgemeinen drei unendlich ferne Punkte E_1, E_2, E_3, die sich auf die drei Ebenen (1) *und* (2) *des Büschels* § 1, (6) *verteilen.*

3. Unterscheidung nach den drei unendlich fernen Punkten. *Der erste dieser drei Punkte E_1 ist immer reell und ist der unendlich ferne Punkt X der x-Achse, $E_1 = X$.* Bezüglich der Realität und Lage der beiden anderen E_2, E_3 müssen fünf Fälle unterschieden werden, die in Fig. 5—9 schematisch gekennzeichnet sind. Die Figuren stellen die Leitkurven des Kegels und Zylinders in der Ebene $O'y'z'$ der Fig. 1 dar.

Als *Leitkurve des Kegels* § 1, (1) ist in allen Fällen *dieselbe Ellipse k' mit ihrer Tangente s in O'* beibehalten. Es würde sich nichts Wesentliches ändern, wenn sie durch eine Hyperbel oder Parabel ersetzt wäre. Nur würde dann für die zwei unendlich fernen Punkte K' der Leitkurve die Erzeugende OK' des Kegels (Fig. 1 und 2) in die entsprechende Gerade OK in der yz-Ebene und der Punkt P in H hineinfallen.

Als *Leitkurve h' des Zylinders* § 1, (2) aber, *von deren Art das Ebenenpaar* (2) *allein abhängt,* ist in Fig. 5 eine Ellipse, in Fig. 6 und 7 eine Hyperbel, in Fig. 8 und 9 (überall punktiert-gestrichelt) eine Parabel genommen. Dementsprechend ist der *Zylinder* § 1, (2) selbst ein *elliptischer, hyperbolischer* oder *parabolischer.*

4. Fall des elliptischen Zylinders (Fig. 5). Der Zylinder § 1, (2) ist elliptisch, wenn:

$$b_{22}b_{33} - b_{23}^2 > 0. \tag{4}$$

Die Ebenen des Paares (2) und die Wurzeln λ des zweiten Faktors (3) sind dann konjugiert komplex. Zu jeder Ebene § 1, (6), wie sie in Fig. 5 im Durchschnitt durch die Geraden $O'K'H'$ dargestellt ist, gehört (Fig. 2) ein endlicher Punkt der Kurve § 1, (10), ausgenommen allein die Ebene (1), in Fig. 5 der Tangente $s = O'K_2'H_2'$ entsprechend, zu der der unendlich ferne Punkt der x-Achse gehört (Fig. 4).

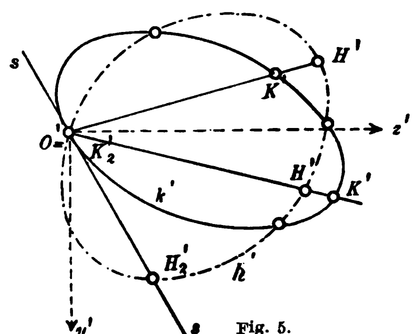


Fig. 5.

I. *Der kub. Kegelschnitt* § 1, (10), *in welchem der Kegel* § 1, (1) *von dem Zylinder* § 1, (2) *geschnitten wird, hat in der unendlich fernen Ebene einen reellen Punkt $E_1 = X$ und zwei konjugiert imaginäre Punkte E_2, E_3, wenn der Zylinder elliptisch ist.*

5. Fall des hyperbolischen Zylinders (Fig. 6 u. 7). Der Zylinder § 1, (2) ist hyperbolisch, wenn:

(5) $$b_{22}b_{33} - b_{23}^2 < 0.$$

Die Ebenen des Paares (2) und die Wurzeln λ des zweiten Faktors (3) sind reell und verschieden. Nicht nur zur Ebene (1), $s = O'K_2'H_2'$ in Fig. 6, sondern auch zu den den Asymptotenebenen des hyperbolischen Zylinders parallelen Ebenen $O'K_3'$, $O'K_4'$ (Fig. 6) gehört je

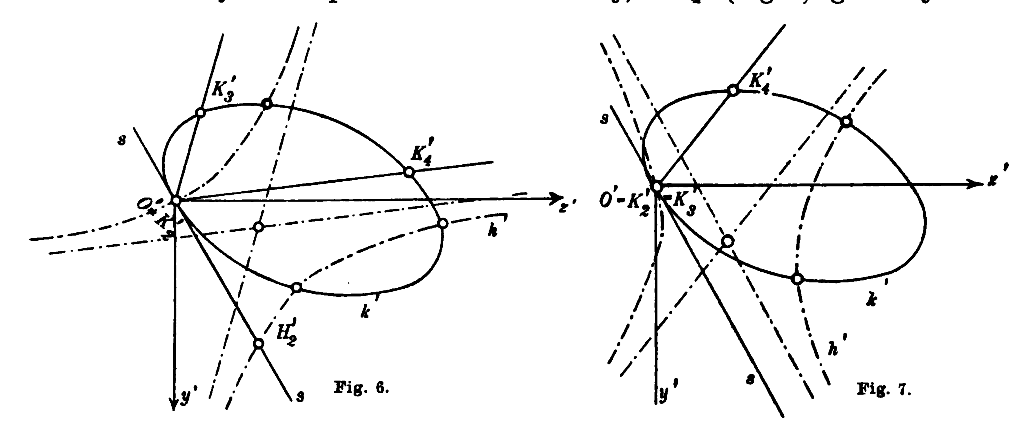


Fig. 6. Fig. 7.

ein unendlich ferner Punkt E_1, E_2, E_3 der Kurve § 1, (10). Wenn jedoch für:

(6) $$b_{22}a_{13}^2 - 2\,b_{23}a_{13}a_{12} + b_{33}a_{12}^2 = 0$$

die Ebene (1) mit einer der beiden Ebenen (2) zusammenfällt (s parallel einer Asymptote, $K_2' = K_3'$ in Fig. 7) und die kub. Gleichung (3) die Wurzeln:

(7) $$\lambda = -\frac{a_{13}}{a_{12}},\ \lambda = -\frac{a_{13}}{a_{12}},\ \lambda = \frac{b_{22}a_{13} - 2b_{23}a_{12}}{b_{22}a_{12}}$$

erhält, so fällt der Punkt E_2 mit E_1 zusammen, übereinstimmend mit den Gleichungen § 1, (10).

II. *Der kub. Kegelschnitt* § 1, (10), *in welchem der Kegel* § 1, (1) *von dem Zylinder* § 1, (2) *geschnitten wird, hat in der unendlich fernen Ebene drei verschiedene reelle Punkte* $E_1 = X, E_2, E_3$, *wenn der Zylinder hyperbolisch ist.*

IIa. *Jedoch fallen zwei von den drei unendlich fernen Punkten,* $E_1 = E_2$ *in* X *zusammen bei getrennt bleibendem* E_3, *wenn unter der Bedingung* (6) *die eine Asymptotenebene des hyperbolischen Zylinders parallel ist der Tangentialebene des Kegels längs der gemeinsamen Erzeugenden.*

6. Fall des parabolischen Zylinders (Fig. 8 u. 9). Der Zylinder § 1, (2) ist parabolisch, wenn:

$$b_{22} b_{33} - b_{23}^2 = 0. \tag{8}$$

Die Ebenen des Paares (2), $O'K_3' = O'K_4'$ in Fig. 8, fallen in der Ebene:

$$b_{22} y + b_{23} z = 0 \text{ oder } b_{23} y + b_{33} z = 0 \tag{9}$$

zusammen, die der Hauptebene des parabolischen Zylinders parallel ist. Zu der doppelt zählenden Ebene (9) gehört ein doppelt zählender unendlich ferner Punkt $E_2 = E_3$

Fig. 8.

Fig. 9.

der Raumkurve. Er entspricht der Doppelwurzel λ des zweiten Faktors (3).

Wenn jedoch für:

$$a_{12} b_{23} - a_{13} b_{22} = 0 \tag{10}$$ und $$a_{12} b_{33} - a_{13} b_{23} = 0 \tag{11}$$

die Ebene (1) mit der Doppelebene (9) zusammenfällt (s parallel der Hauptachse der Parabel in Fig. 9) und die kub. Gleichung (3) dreimal die Wurzeln $\lambda = - a_{13} : a_{12}$ hat, so fallen alle drei unendlich fernen Punkte der Kurve zusammen.

III. *Der kub. Kegelschnitt* § 1, (10), *in welchem der Kegel* § 1, (1) *von dem Zylinder* § 1, (2) *geschnitten wird, hat in der unendlich fernen Ebene zwei zusammenfallende Punkte* $E_2 = E_3$ *und einen getrennten Punkt* $E_1 = X$.

IV. *Jedoch fallen alle drei unendlich fernen Punkte* E_1, E_2, E_3 *in* X *zusammen, wenn unter den Bedingungen* (10), (11) *die Hauptebene des parabolischen Zylinders parallel ist der Tangentialebene des Kegels längs der gemeinsamen Erzeugenden.*

Wir behalten beide Bedingungen (10) und (11) bei. Denn aus den beiden in b_{22}, b_{23} linearen und homogenen Gleichungen (8) und (10):

$$b_{33} b_{22} - b_{23} b_{23} = 0, \quad a_{13} b_{22} - a_{12} b_{23} = 0$$

folgt zwar die dritte, (11), von selbst, wenn b_{22} und b_{23} nicht beide 0 sind. Ist aber $b_{22} = 0$ und $b_{33} = 0$, so ist (11) keine Folge von (8) und (10). Während also für $b_{22} = 0$, $b_{23} = 0$, $a_{12} b_{33} \neq 0$ noch der Fall III vorliegt, entsteht für $b_{22} = 0$, $b_{23} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{13} \neq 0$ der Fall IV. Beides ist mit § 1, (12) verträglich.

7. Die vier Arten der kub. Kegelschnitte. Indem wir den Fall IIa und III zusammenfassen, ergeben sich für *den durch die beiden Gleichungen* § 1, (1); (2) *oder die Parameterdarstellung* § 1, (10) *gegebenen kub. Kegelschnitt* unter folgenden Bedingungen als reelle unendlich ferne Punkte:

I. $b_{22} b_{33} - b_{23}^2 > 0$: *ein* unendlich ferner Punkt $E_1 = X$.

II. $b_{22} b_{33} - b_{23}^2 < 0$, $b_{22} a_{13}^2 - 2 b_{23} a_{13} a_{12} + b_{33} a_{12}^2 \neq 0$: *drei getrennte* $E_1 = X, E_2, E_3$.

III. $b_{22} b_{33} - b_{23}^2 < 0$, $b_{22} a_{13}^2 - 2 b_{23} a_{13} a_{12} + b_{33} a_{12}^2 = 0$
oder $b_{22} b_{33} - b_{23}^2 = 0$, $b_{22} a_{13} - b_{23} a_{12}$, $b_{23} a_{13} - b_{33} a_{12}$ nicht beide 0
} *zwei zusammenfallende und ein getrennter* $E_1 = E_2 = X, E_3$ oder $E_1 = X, E_2 = E_3$.

IV. $b_{22} b_{33} - b_{23}^2 = 0$, $b_{22} a_{13} - b_{23} a_{12} = 0$, $b_{23} a_{13} - b_{33} a_{12} = 0$: *drei zusammenfallende* $E_1 = E_2 = E_3 = X$.

Diesen vier Fällen[1]) entsprechend heißt der kub. Kegelschnitt I. *kub. Ellipse;* II. *kub. Hyperbel;* III. *kub. hyperbolische Parabel;* IV. *kub. Parabel.*

§ 3. Vereinfachung der analytischen Darstellung des kub. Kegelschnittes.

1. Drehung des Koordinatensystems um die gemeinsame Erzeugende. In § 1, 2 wurde die Spitze des Kegels als Anfangspunkt und die gemeinsame Gerade von Kegel und Zylinder als x-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems $Oxyz$ gewählt. Diese Verfügung läßt noch eine Drehung des Systems um die x-Achse offen. Daher kann *die xy-Ebene in die Tangentialebene* § 1, (15) *des Kegels längs der x-Achse* gelegt, also ohne Beschränkung:

(1) $$a_{12} = 0$$

genommen werden.

Wird gleichzeitig die Bezeichnung:

(2) $$2a_{13},\ 2b_{24},\ 2b_{34} \text{ in } -a_{13},\ -b_{12},\ -b_{13}$$

umgeändert, so ergibt sich aus § 1, 2:

1) Fr. Seydewitz, Arch. Math. Phys. 10 (1847), S. 212.

Der kub. Kegelschnitt kann stets durch die Gleichungen:

$$(3)\qquad a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 - a_{13}zx = 0,$$

$$(4)\qquad b_{22}y^2 + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 - b_{12}yt - b_{13}zt = 0$$

eines Kegels und eines Zylinders dargestellt werden.

Die erforderlichen Bedingungen § 1, (3); (12); (4) kommen hier auf:

$$(5)\qquad a_{22} \neq 0,\quad a_{13} \neq 0,\quad b_{12} \neq 0,\quad 4B = 2b_{23}b_{12}b_{13} - b_{22}b_{13}^2 - b_{33}b_{12}^2 \neq 0$$

zurück.

Die *Parameterdarstellung* § 1, (10) wird jetzt:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varrho x = (a_{22}\lambda^2 + 2a_{23}\lambda + a_{33})(b_{12}\lambda + b_{13}), \\ \varrho y = a_{13}(b_{12}\lambda + b_{13})\lambda, \\ \varrho z = a_{13}(b_{12}\lambda + b_{13}), \\ \varrho t = a_{13}(b_{22}\lambda^2 + 2b_{23}\lambda + b_{33}). \end{cases}$$

2. Die Unterscheidung der Arten. In § 2, 7 kommt die 2. Bedingung II mit (1) auf $b_{22}a_{13}^2 \neq 0$ und nach (5) auf $b_{22} \neq 0$ zurück, ebenso die 2. Bedingung des ersten Falles III auf $b_{22} = 0$, was aber mit $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 < 0$ zusammen $b_{22} = 0$, $b_{23} \neq 0$ gibt. Im zweiten Fall III wäre $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0$; b_{22}, b_{23} nicht beide 0, was aber auf $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0$ $b_{22} \neq 0$ zurückkommt, da mit $b_{22} = 0$ auch $b_{23} = 0$ sein müßte. Im Fall IV ist dann $b_{22} = 0$, $b_{23} = 0$.

Die Bedingungen werden also für den kub. Kegelschnitt (3), (4), (6):

(7)
I. $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 > 0$: *kub. Ellipse;*
II. $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 < 0$, $b_{22} \neq 0$: *kub. Hyperbel;*
III. $b_{22} = 0$, $b_{23} \neq 0$ oder $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0$, $b_{22} \neq 0$: *kub. hyperbolische Parabel;*
IV. $b_{22} = 0$, $b_{23} = 0$: *kub. Parabel.*

Die Bedingungen ergeben sich auch direkt aus der letzten Gleichung (6). Der *einen* stets vorhandenen Wurzel $\lambda = \infty$ der kub. Gleichung $t = 0$ entspricht der unendlich ferne Punkt X der x-Achse Die *beiden anderen* Wurzeln sind bei I imaginär; bei II reell, unter sich und von ∞ verschieden; bei III entweder unter sich verschieden und eine gleich ∞, oder unter sich gleich und von ∞ verschieden; bei IV unter sich gleich und gleich ∞.

3. Schematische Darstellung der Unterscheidungsmerkmale. Um die Fig. 5—9 auf den vorliegenden Fall anzuwenden, hat man nur die y'-Achse in die Tangente s zu legen, also beispielsweise Fig. 5 in Fig. 10 zu verwandeln.

Man kann aber die fünf Fälle, statt durch die Schnittlinien von *Kegel* und *Zylinder* mit der Ebene $O'y'z'$ auch durch *die Schnittlinien beider mit der unendlich fernen Ebene* $t = \infty$ schematisch kennzeichnen, als wenn diese im Endlichen läge.

Die drei Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ schneiden die unendlich ferne Ebene in einem Dreieck XYZ (Fig. 11—15); der *Kegel* (3) schneidet sie in einem als Ellipse dargestellten *Kegelschnitt* k, welcher wegen (1) die Seite $z = 0$ des Dreiecks in der Ecke X berührt; der *elliptische, hyperbolische* und *parabolische Zylinder* (4) schneidet sie in einem *imaginären* (Fig. 11) oder *reellen Linienpaar* h (Fig. 12 u. 13) mit dem Doppelpunkt X oder in einer *Doppellinie* h (Fig. 14

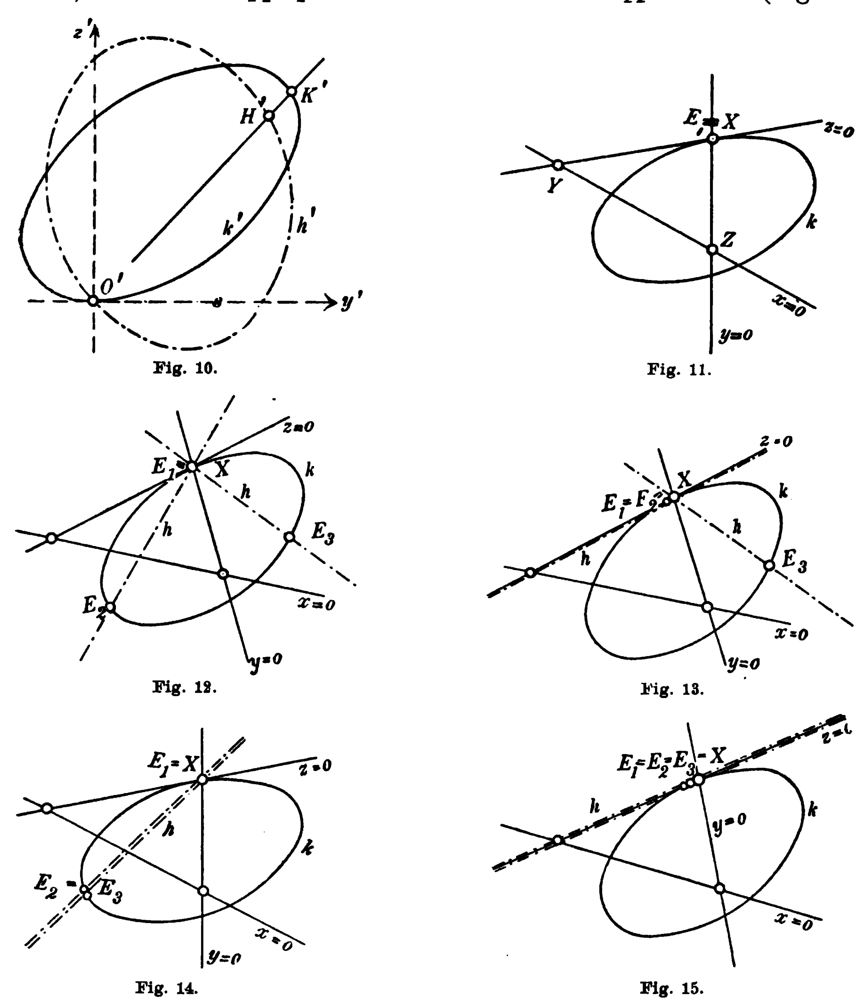


Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14. Fig. 15.

u. 15; die Schnittlinien des Zylinders sind in allen Fällen punktiert-gestrichelt dargestellt). Die Schnittpunkte der beiden Kurven h und k sind die unendlich fernen Punkte des kub. Kegelschnittes.

Fig. 11 entspricht der kub. Ellipse mit einem unendlich fernen Punkt $E_1 = X$; Fig. 12 der kub. Hyperbel mit drei getrennten unendlich fernen Punkten $E_1 = X$, E_2, E_3; Fig. 13 u. 14 der kub. hyperbolischen Parabel mit zwei zusammenfallenden und einem getrennten Punkt $E_1 = E_2 = X$ und E_3 oder $E_2 = E_3$ und $E_1 = X$; Fig. 15 der kub. Parabel mit drei zusammenfallenden $E_1 = E_2 = E_3 = X$.

4. Änderung des Parameters. Der unendlich ferne Punkt der x-Achse hat in der Darstellung (6) den Parameter $\lambda = \infty$. Will man dem Punkte O den Parameter 0 zukommen lassen, kann man, da nach (5) $b_{12} \neq 0$, durch die Gleichungen:

$$\lambda = \frac{b_{12}\lambda' - b_{13}}{b_{12}}, \qquad \lambda' = \frac{b_{12}\lambda + b_{13}}{b_{12}} \tag{8}$$

einen neuen Parameter einführen. Man erhält dann an Stelle von (6) die folgende *Parameterdarstellung*:

$$\left.\begin{cases} \varrho x = \{a_{22}(b_{12}\lambda' - b_{13})^2 + 2\,a_{23}(b_{12}\lambda' - b_{13})b_{12} + a_{33}b_{12}^2\}\,b_{12}\lambda', \\ \varrho y = a_{13}b_{12}^2(b_{12}\lambda' - b_{13})\lambda', \\ \varrho z = a_{13}b_{12}^3\lambda', \\ \varrho t = a_{13}\{b_{22}(b_{12}\lambda' - b_{13})^2 + 2\,b_{23}(b_{12}\lambda' - b_{13})b_{12} + b_{33}b_{12}^2\}. \end{cases}\right. \tag{9}$$

5. Form der Parameterdarstellung. Die Gleichungen (9) sind, wenn λ' wieder mit λ bezeichnet wird, von der Form:

$$\begin{aligned} \varrho x &= a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda, \qquad & \varrho z &= b\lambda, \\ \varrho y &= b\lambda^2 + b'\lambda, & \varrho t &= l\lambda^2 + m\lambda + n. \end{aligned} \tag{10}$$

Sie enthalten sieben Konstanten, die Verhältnisse von $a, a', a'', b, b', l, m, n$, die mit den sieben Verhältnissen $a_{22} : a_{23} : a_{33} : a_{13}$ und $b_{22} : b_{23} : b_{33} : b_{12} : b_{13}$ der Gleichungen (3) und (4) in der Beziehung stehen:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{a_{22}}{a_{13}}, \quad \dfrac{a'}{b} = 2\,\dfrac{a_{23}b_{12} - a_{22}b_{13}}{a_{13}b_{12}}, \quad \dfrac{a''}{b} = \dfrac{a_{22}b_{13}^2 - 2\,a_{23}b_{12}b_{13} + a_{33}b_{12}^2}{a_{13}b_{12}^2}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{b'}{b} = -\dfrac{b_{13}}{b_{12}}, \\ \dfrac{l}{b} = \dfrac{b_{22}}{b_{12}}, \quad \dfrac{m}{b} = 2\,\dfrac{b_{23}b_{12} - b_{22}b_{13}}{b_{12}^2}, \quad \dfrac{n}{b} = \dfrac{b_{22}b_{13}^2 - 2\,b_{23}b_{12}b_{13} + b_{33}b_{12}^2}{b_{12}^3}. \end{cases} \tag{11}$$

Nach (5) ist:

$$a \neq 0, \; b \neq 0, \; n \neq 0. \tag{12}$$

Umgekehrt folgt daher aus (11):

$$(13)\begin{cases} \dfrac{a_{22}}{a_{12}} = \dfrac{a}{b}, \quad \dfrac{2a_{23}}{a_{12}} = \dfrac{a'b - 2ab'}{b^2}, \quad \dfrac{a_{33}}{a_{12}} = \dfrac{a''b^2 - a'bb' + ab'^2}{b^3}; \\ \dfrac{b_{22}}{b_{12}} = \dfrac{l}{b}, \quad \dfrac{2b_{23}}{b_{12}} = \dfrac{mb - 2lb'}{b^2}, \quad \dfrac{b_{33}}{b_{12}} = \dfrac{nb^2 - mbb' + lb'^2}{b^3}, \quad \dfrac{b_{13}}{b_{12}} = -\dfrac{b'}{b}. \end{cases}$$

Der kub. Kegelschnitt kann also stets in der Form (10) *dargestellt werden, wo die Verhältnisse der acht Koeffizienten mit der Beschränkung* (12) *beliebig gegeben sein können.*

6. Unterscheidung der Arten. Da nach (13):

$$(14) \qquad \frac{b_{22}b_{33} - b_{23}^2}{b_{12}^2} = \frac{4ln - m^2}{4b^2},$$

so folgt aus (7) und (13):

Der kub. Kegelschnitt (10) *ist für:*

(15) I. $4ln - m^2 > 0$: *eine kub. Ellipse;*

II. $4ln - m^2 < 0,\ l \neq 0$: *kub. Hyperbel;*

III. $l = 0,\ m \neq 0$ oder : $4ln - m^2 = 0,\ l \neq 0$: *kub. hyperbol. Parabel;*

IV. $l = 0,\ m = 0$: *kub. Parabel.*

§ 4. Die allgemeine Raumkurve 3. Ordnung und die Transformation des Parameters.

1. Die (rationale) Raumkurve 3. O. Die Darstellungen § 1, (10); § 3, (6); (10) fallen unter die allgemeine Form:[1])

$$(1)\begin{cases} \varrho x = a_{11}\lambda^3 + a_{12}\lambda^2 + a_{13}\lambda + a_{14}, \\ \varrho y = a_{21}\lambda^3 + a_{22}\lambda^2 + a_{23}\lambda + a_{24}, \\ \varrho z = a_{31}\lambda^3 + a_{32}\lambda^2 + a_{33}\lambda + a_{34}, \\ \varrho t = a_{41}\lambda^3 + a_{42}\lambda^2 + a_{43}\lambda + a_{44} = g(\lambda), \end{cases}$$

mit 16 beliebigen Koeffizienten a_{kl}, welche der *allgemeine Ausdruck der (rationalen) Raumkurve 3. O.* ist (s. unter **4**).

Vorausgesetzt wird nur, daß die Determinante der Koeffizienten nicht verschwinde:[2])

$$(2) \qquad A = |a_{kl}| \neq 0.$$

Dann können zunächst die vier ganzen Funktionen von λ für keinen Wert von λ gleichzeitig verschwinden. *Es gehört also zu jedem Werte λ ein einziger bestimmter Punkt x, y, z, t* (I § 47, **1**).

1) Joachimsthal, J. f. Math. 56 (1859), S. 44.

2) Über die Ausartungen der Raumkurve 3. O., die hier ausgeschlossen bleiben, vgl. v. Staudt, Beitr. (1860), S. 301; H. Schubert, Math. Ann. 15 (1879), S. 529; A. Brill, Math. Ann. 64 (1907), S. 319; Palermo Rend. 25 (1908), S. 188.

2. Auflösung nach den Potenzen von λ. Bezeichnen A_{kl} die Unterdeterminanten dritten Grades von A, so können, wiederum in Folge der Voraussetzung (2)[1]), die Gleichungen (1) mit $\varrho\sigma = A$ in der folgenden Form aufgelöst werden (s. § 24, (22)):

$$(3)\quad \begin{cases} \sigma\lambda^3 = A_{11}x + A_{21}y + A_{31}z + A_{41}t = y_1, \\ \sigma\lambda^2 = A_{12}x + A_{22}y + A_{32}z + A_{42}t = y_2, \\ \sigma\lambda\ \ = A_{13}x + A_{23}y + A_{33}z + A_{43}t = y_3, \\ \sigma\quad\ = A_{14}x + A_{24}y + A_{34}z + A_{44}t = y_4. \end{cases}$$

Da nach (2) (I Anm. 1, III, (7)):

$$(4)\qquad |A_{kl}| = A^3 \neq 0,$$

so können auch die vier zur Abkürzung eingeführten linearen Funktionen y_1, y_2, y_3, y_4 für keinen Punkt x, y, z, t des Raumes alle gleichzeitig verschwinden. Vermöge der Gleichungen (vgl. § 7, (21)):

$$(5)\qquad \lambda = y_1 : y_2 = y_2 : y_3 = y_3 : y_4$$

gehört daher zu jedem Punkte x, y, z, t der Raumkurve ein bestimmter Parameter λ.

Zu verschiedenen Parametern gehören verschiedene Punkte und umgekehrt.

3. Schnittpunkte mit einer Ebene. Soll ein Punkt (1) in einer gegeben Ebene (I § 47, (4)):

$$(6)\qquad ux + vy + wz + st = 0$$

liegen, muß λ der Bedingung entsprechen:

$$(7)\quad \begin{cases} (a_{11}u + a_{21}v + a_{31}w + a_{41}s)\lambda^3 + (a_{12}u + a_{22}v + a_{32}w + a_{42}s)\lambda^2 \\ + (a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w + a_{43}s)\lambda + (a_{14}u + a_{24}v + a_{34}w + a_{44}s) = 0. \end{cases}$$

Da die Koeffizienten der kubischen Gleichung (7) nach (2) für keine Ebene u, v, w, s alle gleichzeitig verschwinden können, so folgt:

I. *Die Raumkurve* (1) *hat in jeder Ebene des Raumes immer drei und nur drei Punkte.*[2])

Zwei von ihnen können konjugiert imaginär sein, wenigstens einer ist reell. Weiter folgt sofort:

II. *Die Raumkurve* (1) *kann mit einer Geraden des Raumes nicht mehr als zwei Punkte gemein haben.* Denn lägen drei Punkte der Kurve auf der Geraden, würde die Verbindungsebene der Geraden mit einem vierten Punkt der Kurve vier enthalten.

---

1) A. Baltzer, Anal. Geom.. Leipzig 1882, S. 482.

2) M. Chasles, J. de math. (2) 2 (1857), S. 397.

4. Raumkurve 3. O. überhaupt. *Eine Raumkurve 3. O. überhaupt ist eine solche, die in jeder Ebene drei Punkte hat.* Legt man dann durch die Verbindungslinie zweier bekannter Punkte der Kurve ein Ebenenbüschel, so kann jede Ebene des Büchels die Kurve außer in den zwei bekannten nur noch in *einem* Punkte schneiden. Seine Koordinatenverhältnisse $x:y:z:t$ müssen daher rational von dem Büschelparameter abhängen und müssen mit Rücksicht auf **3** gerade die Form (1) haben.

Jede Raumkurve 3. O. überhaupt ist eine rationale Raumkurve 3. O.[1])

5. Lineare Transformation des Parameters. Die Form der Gleichungen (1) bleibt unverändert, wenn man durch die lineare Substitution:

$$\lambda = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \tag{8}$$

einen neuen Parameter μ einführt. Denn der dabei auftretende Nenner $(\gamma\mu + \delta)^3$ kann, da es nur auf die Verhältnisse von x, y, z, t ankommt, in allen vier Gleichungen rechts weggelassen, bezüglich in ϱ aufgenommen werden. Es wird also wiederum:

$$\begin{cases} \varrho x = a'_{11}\mu^3 + a'_{12}\mu^2 + a'_{13}\mu + a'_{14}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varrho t = a'_{41}\mu^3 + a'_{42}\mu^2 + a'_{43}\mu + a'_{44}. \end{cases} \tag{9}$$

Hier haben insbesondere die Koeffizienten von ϱt die Werte:

$$\begin{cases} a'_{41} = a_{41}\alpha^3 + a_{42}\alpha^2\gamma + a_{43}\alpha\gamma^2 + a_{44}\gamma^3, \\ a'_{42} = (3a_{41}\alpha^2 + 2a_{42}\alpha\gamma + a_{43}\gamma^2)\beta + (a_{42}\alpha^2 + 2a_{43}\alpha\gamma + 3a_{44}\gamma^2)\delta, \\ a'_{43} = (3a_{41}\alpha + a_{42}\gamma)\beta^2 + 2(a_{42}\alpha + a_{43}\gamma)\beta\delta + (a_{43}\alpha + 3a_{44}\gamma)\delta^2, \\ a'_{44} = a_{41}\beta^3 + a_{42}\beta^2\delta + a_{43}\beta\delta^2 + a_{44}\delta^3. \end{cases} \tag{10}$$

Die Eigenschaft (2) der Determinante bleibt bei der Transformation (8) erhalten (s. später § 24, 4).

6. Verschwinden des Koeffizienten a'_{41}. Wenn in (1):

$$a_{41} \neq 0, \tag{11}$$

so hat die kub. Gleichung:

$$g(\lambda) = a_{41}\lambda^3 + a_{42}\lambda^2 + a_{43}\lambda + a_{44} = 0 \tag{12}$$

wenigstens eine *reelle endliche* Wurzel λ_0. Nimmt man dann in (8):

$$\alpha = \lambda_0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1,\ \delta = 0;\ \alpha\delta - \beta\gamma = -1, \tag{13}$$

---

1) S. z. B. R. Mehmke, Punkt- und Vektorrechnung 1 (1913), S. 200.

so daß:

$$(14) \qquad \lambda = \frac{\lambda_0 \mu + 1}{\mu},$$

so wird nach (10):

$$(15) \quad \begin{cases} a'_{41} = a_{41}\lambda_0^3 + a_{42}\lambda_0^2 + a_{43}\lambda_0 + a_{44} = 0, & a'_{42} = 3a_{41}\lambda_0^2 + 2a_{42}\lambda_0 + a_{43}, \\ a'_{43} = 3\,a_{41}\lambda_0 + a_{42}, & a'_{44} = a_{41} \neq 0, \end{cases}$$

und damit die letzte Gleichung (9):

$$(16) \qquad \varrho t = a'_{42}\mu^2 + a'_{43}\mu + a'_{44}.$$

Ist in (1) $a_{41} \neq 0$, *kann man stets durch Einführung eines neuen Parameters* μ *bewirken, daß* $a'_{41} = 0$, *wobei gleichzeitig* $a'_{44} \neq 0$.

Ist bereits in (1) $a_{41} = 0$, so ist entweder $a_{44} \neq 0$ oder $a_{44} = 0$. Im letzteren Falle kann man in (1) $\lambda = \mu + \mu_0$ setzen, wodurch:

$$(17) \quad g(\lambda) = a_{42}\lambda^2 + a_{43}\lambda = a_{42}\mu^2 + (2\,a_{42}\mu_0 + a_{43})\mu + (a_{42}\mu_0 + a_{43})\mu_0.$$

Da nun der Koeffizient $(a_{42}\mu_0 + a_{43})\mu_0$ nicht in μ_0 identisch 0 ist, da sonst neben $a_{41} = 0$, $a_{44} = 0$ auch $a_{42} = 0$, $a_{43} = 0$, was gegen (2) ist, kann man μ_0 immer so wählen, daß er von 0 verschieden ist.

Indem man schließlich die alte Bezeichnung wieder einführt, kann man sagen:

In den Gleichungen (1) *kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit:*

$$(18) \qquad a_{41} = 0, \; a_{44} \neq 0$$

vorausgesetzt werden.

7. Die unendlich fernen Punkte der Kurve. Die kub. Gleichung (12) bestimmt die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der drei Schnittpunkte der Kurve (1) mit der unendlich fernen Ebene. Einer dieser drei Punkte ist stets reell und erhält durch die Voraussetzung (18) den Parameter $\lambda_1 = \infty$. Alsdann sind für die beiden andern aus:

$$(19) \qquad g(\lambda) = a_{42}\lambda^2 + a_{43}\lambda + a_{44} = 0$$

zu bestimmenden Parameter folgende Fälle möglich:

I. $a_{42} \neq 0,\; 4\,a_{42}a_{44} - a_{43}^2 > 0 : \lambda_1 = \infty$, λ_2 und λ_3 imaginär;

II. $a_{42} \neq 0,\; 4\,a_{42}a_{44} - a_{43}^2 < 0 : \lambda_1 = \infty$, λ_2 und λ_3 reell, $\lambda_2 \neq \lambda_3,\; \lambda_2 \neq \infty,\; \lambda_3 \neq \infty$;

III a. $a_{42} \neq 0,\; 4\,a_{42}a_{44} - a_{43}^2 = 0 : \lambda_1 = \infty,\; \lambda_2 = \lambda_3 \neq \infty$;

III b. $a_{42} = 0,\; a_{43} \neq 0 \quad : \lambda_1 = \lambda_2 = \infty,\; \lambda_3 \neq \infty$;

IV. $a_{42} = 0,\; a_{43} = 0 \quad : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \infty$.

Die Wurzel $\lambda = 0$ ist durch (18) überall ausgeschlossen.

8. Weitere Normierung des Parameters. Ist nun *erstens:*

(20) $$a_{42} \neq 0,$$

so wird aus (19) mit der unter die Form (8) fallenden Substitution:

(21) $$\lambda = \mu - \frac{a_{43}}{2\,a_{42}}:$$

(22) $$g(\lambda) = a_{42}\mu^2 + \frac{4a_{42}a_{44} - a_{43}^2}{4\,a_{42}},$$

also in den Fällen I und II, mit einer positiven Konstanten e^2 zur Abkürzung, bezüglich:

(23) $$g(\lambda) = a_{42}(\mu^2 + e^2);\ g(\lambda) = a_{42}(\mu^2 - e^2);\ e^2 \neq 0.$$

Im Falle IIIa ist nach (22), indem man mit (21) wieder von μ auf λ zurückgeht und eine Abkürzung e einführt:

(24) $$g(\lambda) = a_{42}\left(\lambda + \frac{a_{43}}{2\,a_{42}}\right)^2 = a_{42}(\lambda - e)^2;\ e \neq 0.$$

Es kann nämlich im Falle IIIa a_{43} nicht verschwinden, ohne daß auch $a_{44} = 0$, was gegen (2) wäre.

Ist *zweitens:*

(25) $$a_{42} = 0,$$

so bleibt für die Fälle IIIb und IV:

(26) $$g(\lambda) = a_{43}\lambda + a_{44} = a_{43}(\lambda - e),\ e \neq 0;\ g(\lambda) = a_{44}.$$

Da in die Gleichungen (1) nur die Verhältnisse der Koeffizienten eingehen, kann man in den Fällen (20) $a_{42} = 1$, in den Fällen (26) $a_{43} = 1$, bezüglich $a_{44} = 1$ nehmen und erhält dann das Resultat:

In der vierten Gleichung (1) *kann man ohne Beschränkung:*

(27) $$g(\lambda) = l\lambda^2 + m\lambda + n$$

setzen und hierin eine der folgenden Annahmen machen:

(28) $$\text{I. } l = 1,\ m = 0,\ n = e^2;\ \text{ II. } l = 1,\ m = 0,\ n = -e^2;$$
$$\text{III. } [l = 1,\ m = -2e,\ n = e^2 \text{ oder}]:\ l = 0,\ m = 1,\ n = -e;$$
$$\text{IV. } l = 0,\ m = 0,\ n = 1,$$

wo überall:

(29) $$e \neq 0\ (n \neq 0).$$

Es wird damit:

(30) $$\text{I. } g(\lambda) = \lambda^2 - e^2;\ \text{ II. } g(\lambda) = \lambda^2 + e^2;$$
$$\text{III. } g(\lambda) = (\lambda - e)^2 \text{ oder } \lambda - e;\ \text{ IV. } g(\lambda) = 1.$$

Die beiden Fälle III gehen durch die Substitution:

(31) $$\lambda = \frac{e\lambda'}{\lambda' - e};\quad g(\lambda) = (\lambda - e)^2 = \frac{e^4}{(\lambda' - e)^2} = \frac{e^4(\lambda' - e)}{(\lambda' - e)^3}$$

ineinander über, indem der Faktor $e^4 : (\lambda' - e)^3$ wie unter **5** in ϱ aufgenommen wird. Wir behalten daher nur den einen, und zwar zweiten Fall III bei.

9. Die Parameter der unendlich fernen Punkte. Das Gesamtergebnis der vorstehenden Entwicklung besteht darin, daß *durch geeignete lineare Substitutionen* (8) *des Parameters* λ *den drei unendlich fernen Punkten der allgemeinen Raumkurve 3. O.* (1) *in den vier Fällen* **7**, I—IV *ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Parameter:*

$$(32)\quad \text{I. } \lambda = \infty,\ \lambda = ei,\ \lambda = -ei; \quad \text{II. } \lambda = \infty,\ \lambda = e,\ \lambda = -e;$$
$$\text{III. } \lambda = \infty,\ \lambda = \infty,\ \lambda = e, \qquad \text{IV. } \lambda = \infty,\ \lambda = \infty,\ \lambda = \infty$$

zuerteilt werden können. Dabei bleibt, sofern e als unbestimmte Konstante betrachtet wird, auch der Parameter λ noch um einen konstanten Faktor unbestimmt (vgl. § 5, **5**; **6**).

§ 5. Die Transformation des rechtwinkligen Koordinatensystems.

1. Parallelverschiebung des rechtwinkligen Koordinatensystems. Bezogen auf ein *rechtwinkliges Koordinatensystems* $Oxyz$ war die *allgemeine Raumkurve 3. O.* durch die Gleichungen § 4, (1) dargestellt, die nach § 4, (27) bei nicht homogener Schreibweise in die Form gebracht werden konnten:

$$(1)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a_{11}\lambda^3 + a_{12}\lambda^2 + a_{13}\lambda + a_{14}}{g(\lambda)}, & y = \dfrac{a_{21}\lambda^3 + a_{22}\lambda^2 + a_{23}\lambda + a_{24}}{g(\lambda)}, \\ z = \dfrac{a_{31}\lambda^3 + a_{32}\lambda^2 + a_{33}\lambda + a_{34}}{g(\lambda)}, & g(\lambda) = l\lambda^2 + m\lambda + n, \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Führt man nun durch die Substitution:

$$(2)\qquad x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z'$$

ein paralleles System $O'x'y'z'$ mit dem Anfangspunkt x_0, y_0, z_0 ein, so wird:

$$x' = x - x_0 = \frac{a_{11}\lambda^3 + (a_{12} - l x_0)\lambda^2 + (a_{13} - m x_0)\lambda + (a_{14} - n x_0)}{g(\lambda)}, \quad y' = \cdots, \quad z' = \cdots$$

Setzt man daher mit Rücksicht auf die Voraussetzung $n \neq 0$:

$$(3)\qquad x_0 = \frac{a_{14}}{n}, \qquad y_0 = \frac{a_{24}}{n}, \qquad z_0 = \frac{a_{34}}{n},$$

läßt die Akzente für das neue System wieder fallen und bezeichnet die neuen Koeffizienten wieder allgemein mit $a_{k\nu}$, so ergibt sich:

Die Parameterdarstellung der allgemeinen Raumkurve 3. O. kann stets auf die Form gebracht werden:

$$(4)\quad x = \frac{a_{11}\lambda^3 + a_{12}\lambda^2 + a_{13}\lambda}{g(\lambda)}, \quad y = \frac{a_{21}\lambda^3 + a_{22}\lambda^2 + a_{23}\lambda}{g(\lambda)}, \quad z = \frac{a_{31}\lambda^3 + a_{32}\lambda^2 + a_{33}\lambda}{g(\lambda)}.$$

Wir setzen nun neuerdings:

$$(5)\quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

und haben die Voraussetzung:

$$(6)\quad An \neq 0.$$

Denn die Voraussetzung § 4, (2) ist ihrer Bedeutung nach, wie gegen jede lineare Transformation des Parameters § 4, 5, auch gegen jede lineare Transformation der Koordinaten invariant, da immer wieder jedem Parameter ein bestimmter Punkt entsprechen muß und umgekehrt (s. den allg. Beweis hierfür § 24, 3).

2. Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems. Führt man jetzt ein neues konzentrisches rechtwinkliges System $O\xi\eta\zeta$ ein, dessen Achsen die Richtungskosinus $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ haben, so ist (I § 37, (11)):

$$(7)\quad \xi = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \quad \eta = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \quad \zeta = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z.$$

Setzt man hier die Werte (4) ein, so ergibt sich:

$$(8)\quad \xi = \frac{a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''}{g(\lambda)}, \quad \eta = \frac{b''\lambda^3 + b\lambda^2 + b'}{g(\lambda)}, \quad \zeta = \frac{c'\lambda^3 + c''\lambda^2 + c}{g(\lambda)},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(9)\quad \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{21}\beta_1 + a_{31}\gamma_1 = a, \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 + a_{32}\gamma_1 = a', \\ a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1 + a_{33}\gamma_1 = a''; \end{cases} \qquad (10)\quad \begin{cases} a_{11}\alpha_2 + a_{21}\beta_2 + a_{31}\gamma_2 = b'', \\ a_{12}\alpha_2 + a_{22}\beta_2 + a_{32}\gamma_2 = b, \\ a_{13}\alpha_2 + a_{23}\beta_2 + a_{33}\gamma_2 = b'; \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} a_{11}\alpha_3 + a_{21}\beta_3 + a_{31}\gamma_3 = c', \\ a_{12}\alpha_3 + a_{22}\beta_3 + a_{32}\gamma_3 = c'' \\ a_{13}\alpha_3 + a_{23}\beta_3 + a_{33}\gamma_3 = c. \end{cases}$$

3. Verfügung über die Richtungskosinus. Wir bestimmen nun die neun Richtungskosinus, die für drei unabhängige Konstanten zählen, aus den Bedingungen:

$$(12)\quad c' = 0, \quad c'' = 0; \qquad b'' = 0.$$

Bezeichnen A_{kl} die Unterdeterminanten von A in (5), so folgt aus den beiden ersten Gleichungen (11) mit $c' = 0$, $c'' = 0$:

$$(13) \quad \varrho\alpha_3 = A_{13}, \quad \varrho\beta_3 = A_{23}, \quad \varrho\gamma_3 = A_{33}; \quad \varrho^2 = A_{13}^2 + A_{23}^2 + A_{33}^2$$

($\neq 0$ nach (6)) und dann aus der dritten:

$$(14) \qquad c = \frac{A}{\varrho} \ (\neq 0 \text{ nach } (6)).$$

Damit ist die Richtung der ζ-Achse (bis auf die Pfeilspitze) und die Konstante c bestimmt.

Aus der ersten Gleichung (10) mit $b'' = 0$ und der Bedingung des Senkrechtstehens der η- und ζ-Achse, also aus:

$$a_{11}\alpha_2 + a_{21}\beta_2 + a_{31}\gamma_2 = 0,$$
$$A_{13}\alpha_2 + A_{23}\beta_2 + A_{33}\gamma_2 = 0,$$

folgt nun weiter:

$$(15) \quad \sigma\alpha_2 = a_{21}A_{33} - a_{31}A_{23}, \quad \sigma\beta_2 = a_{31}A_{13} - a_{11}A_{33}, \quad \sigma\gamma_2 = a_{11}A_{23} - a_{21}A_{13},$$

$$(16) \quad \sigma^2 = (a_{21}A_{33} - a_{31}A_{23})^2 + (a_{31}A_{13} - a_{11}A_{33})^2 + (a_{11}A_{23} - a_{21}A_{13})^2.$$

Es kann also σ nicht verschwinden; denn sonst wäre:

$$A_{13} : A_{23} : A_{33} = a_{11} : a_{21} : a_{31}$$

und wegen der identischen Gleichung:

$$a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} = 0,$$

da auch A_{13}, A_{23}, A_{33} nach (6) nicht alle verschwinden können:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 0,$$

was mit (6) nicht verträglich.

Danach folgt aus den beiden letzten Gleichungen (10) mittels (15) und (13):

$$b = \frac{1}{\sigma}\{a_{12}(a_{21}A_{33} - a_{31}A_{23}) + a_{22}(a_{31}A_{13} - a_{11}A_{33}) + a_{32}(a_{11}A_{23} - a_{21}A_{13})\}$$

$$(17) \qquad = -\frac{1}{\sigma}(A_{13}^2 + A_{23}^2 + A_{33}^2) = -\frac{\varrho^2}{\sigma}(\neq 0);$$

$$b' = \frac{1}{\sigma}\{a_{13}(a_{21}A_{33} - a_{31}A_{23}) + a_{23}(a_{31}A_{13} - a_{11}A_{33}) + a_{33}(a_{11}A_{23} - a_{21}A_{13})\}$$

$$(18) \qquad = \frac{1}{\sigma}(A_{12}A_{13} + A_{22}A_{23} + A_{32}A_{33}).$$

Damit ist die Richtung der η-Achse und die Konstanten b, b' bestimmt. Die ξ-Achse ist dann die Normale der $\eta\zeta$-Ebene, und mit ihren Richtungskosinus sind nach (9) auch die Konstanten a, a', a'' bestimmt. Dabei muß $a \neq 0$ werden, da die drei Gleichungen $a = 0$, $b'' = 0$, $c' = 0$ mit (6) nicht verträglich sind.

4. Resultat der beiden Koordinatentransformationen. Bezeichnet man die neuen Koordinaten abermals mit x, y, z und führt wieder die homogene Schreibweise ein, so folgt:

Die Parameterdarstellung der allgemeinen Raumkurve 3. O. kann mit bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem immer in die Form gebracht werden:

$$(19)\qquad \begin{cases} \varrho x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda, \quad \varrho y = b\lambda^2 + b'\lambda, \\ \varrho z = c\lambda, \quad \varrho t = l\lambda^2 + m\lambda + n, \end{cases}$$

wo l, m, n eines der Wertsysteme:

$$(20)\qquad \text{I. } l = 1,\ m = 0,\ n = e^2; \quad \text{II. } l = 1,\ m = 0,\ n = -e^2;$$
$$\text{III. } l = 0,\ m = 1,\ n = -e; \quad \text{IV. } l = 0,\ m = 0,\ n = 1$$

bedeuten und:

$$(21)\qquad abcn \neq 0.$$

5. Herstellung von zwei gleichen Koeffizienten. Wegen des unbestimmten Faktors ϱ können die rechten Seiten der Gleichungen (19) mit einem beliebigen Faktor multipliziert werden. Multipliziert man sie mit dem nach (21) stets bestimmten Faktor $b^2 : c^2$ und setzt alsdann

$$(22)\qquad \mu = \frac{b\lambda}{c},$$

so nehmen sie die Form an:

$$(23)\qquad \begin{cases} \varrho x = \frac{ac}{b}\mu^3 + a'\mu^2 + \frac{a''b}{c}\mu, \quad \varrho y = b\mu^2 + \frac{bb'}{c}\mu, \\ \varrho z = b\mu, \quad \varrho t = l\mu^2 + \frac{mb}{c}\mu + \frac{nb^2}{c^2}, \end{cases}$$

wo μ^2 in y und μ in z denselben Koeffizienten b haben.

Für die Wertsysteme (20) nimmt die rechte Seite der vierten Gleichung (23) die Formen an:

$$\mu^2 + \frac{b^2e^2}{c^2}, \quad \mu^2 - \frac{b^2e^2}{c^2}, \quad \frac{b}{c}\left(\mu - \frac{be}{c}\right), \quad \frac{b^2}{c^2}.$$

In den beiden letzten Fällen kann man nachträglich alle rechten Seiten von (23) wieder mit $c : b$, bezüglich $c^2 : b^2$ multiplizieren, wodurch μ^2 in y und μ in z beide denselben Koeffizienten c, bezüglich $c^2 : b$ behalten. Bezeichnet man dann die neuen Koeffizienten wieder mit den früheren einfachen Buchstaben, auch $be : c$ wieder mit e und μ mit λ, so erhält man aus (23) wieder die Formeln (19) mit den Angaben (20), nur daß $c = b$ geworden ist.

In der Parameterdarstellung (19) *der allgemeinen Raumkurve 3. O. kann ohne Beschränkung:*

$$(24)\qquad b = c$$

genommen werden.

Damit ist dann der nach § 4, **9** noch verfügbare Faktor des Parameters λ bestimmt.

6. Andere Verfügung über den Faktor des Parameters. Setzt man in den Fällen I—III in (20), wo in (19) $\varrho t = \lambda^2 \pm e^2$ oder $\varrho t = \lambda - e$ wird, $\lambda = e\mu$ und dividiert dann alle rechten Seiten durch e^2 oder e, so erhält man:

$$\varrho x = ae\mu^3 + a'\mu^2 + \frac{a''}{e}\mu, \quad \varrho y = b\mu^2 + \frac{b'}{e}\mu, \quad \varrho z = \frac{c}{e}\mu, \quad \varrho t = \mu^2 \pm 1$$

oder:

$$\varrho x = ae^2\mu^3 + a'e\mu^2 + a''\mu, \quad \varrho y = be\mu^2 + b'\mu, \quad \varrho z = c\mu, \quad \varrho t = \mu - 1,$$

wo man schließlich die Koeffizienten wieder mit den einfachen Buchstaben wie in (19) und μ mit λ bezeichnen kann. Man erhält dann die Gleichungen (19), nur mit $e = 1$ in (20).

In der Parameterdarstellung (19) *kann ohne Beschränkung bei* I—III:

$$e = 1 \tag{25}$$

genommen werden.

Auch damit ist der verfügbare Faktor von λ bestimmt.[1])

§ 6. Die allgemeine Raumkurve dritter Ordnung als kubischer Kegelschnitt.

1. Bestimmung eines Kurvenpunktes durch drei Ebenen. Die Auflösung der Gleichungen § 5, (19) der allgemeinen Raumkurve 3. O. nach den Potenzen von λ gibt mit einem Proportionalitätsfaktor σ:

$$\tag{1} \begin{cases} \sigma\lambda^3 = n\{c(bx - a'y) + (a'b' - a''b)z\}, \; \sigma\lambda^2 = an(cy - b'z), \\ \sigma\lambda \;\;= abnz, \; \sigma = a\{-lcy + (lb' - mb)z + bct\}. \end{cases}$$

Indem man die drei ersten Gleichungen (1) je durch die folgende dividiert, erhält man die Abhängigkeit des Kurvenpunktes x, y, z, t von seinem Parameter λ durch folgende drei Gleichungen ausgedrückt:

$$\tag{2} \begin{cases} \{c(bx - a'y) + (a'b' - a''b)z\} - \lambda a(cy - b'z) = 0, \; (cy - b'z) - \lambda bz = 0, \\ nbz - \lambda\{-lcy + (lb' - mb)z + bct\} = 0. \end{cases}$$

Der dem Parameter λ entsprechende Punkt erscheint danach als *Schnittpunkt dreier Ebenen* (vgl. § 36, **1**).

---

1) Es bleiben dann sechs Konstanten a, a', a'', b, b', c, und sechs gehen auf das Koordinatensystem, vgl. R. Sturm, Math. Ann. 26 (1886), S. 489; Geom. Verwandtschaften 2 (1908), S. 178; H. Schubert, Kalkül d. abzähl. Geom., Leipzig 1879, S. 163.

2. Übergang auf Kegel und Zylinder. Er genügt daher auch den durch Elimination von λ aus den beiden ersten und beiden letzten Gleichungen (2) hervorgehenden Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} bz\{c(bx-a'y)+(a'b'-a''b)z\}-a(cy-b'z)^2=0, \\ (cy-b'z)\{-lcy+(lb'-mb)z+bct\}-nb^2z^2=0 \end{cases}$$

oder geordnet:

$$(4)\begin{cases} ac^2y^2+(a'b-2ab')cyz+\{ab'^2-(a'b'-a''b)b\}z^2-b^2czx=0, \\ lc^2y^2+(mb-2lb')cyz+\{lb'^2-(mb'-nb)b\}z^2-bc^2yt+bb'czt=0 \end{cases}$$

oder mit neuer Bezeichnung der Koeffizienten:

$$(5)\qquad a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2-a_{13}zx=0,$$

$$(6)\qquad b_{22}y^2+2b_{23}yz+b_{33}z^2-b_{12}yt-b_{13}zt=0.$$

Die allgemeine Raumkurve 3. O. § 5, (19) *ist daher der übrige Durchschnitt eines Kegels* (5) *und eines Zylinders* (6), *welche die x-Achse* $y=0$, $z=0$ *gemein haben.*

Diese selbst gehört der Kurve nicht an. Denn die Gleichungen (3) führen, je in Verbindung mit der mittleren (2) als linear und homogen in $cy-b'z$ und bz betrachtet (vgl. § 7, **9**), nur dann bei beliebigem λ auf die beiden anderen (2) zurück, wenn nicht $cy-b'z$ und z beide verschwinden.

3. Beziehung zwischen den beiderseitigen Koeffizienten. Für die Verhältnisse der Koeffizienten der Gleichungen (5) und (6) ergibt sich aus (4), da nach § 5, (21) $abcn\neq 0$ und daher nach (4) und (5), (6) $a_{22}a_{13}b_{12}\neq 0$:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{a_{22}}{a_{13}}=\dfrac{ac}{b^2}, & \dfrac{2a_{23}}{a_{13}}=\dfrac{a'b-2ab'}{b^2}, \quad \dfrac{a_{33}}{a_{13}}=\dfrac{ab'^2-a'bb'+a''b^2}{b^2c}, \\ \dfrac{b_{22}}{b_{12}}=\dfrac{l}{b}, & \dfrac{2b_{23}}{b_{12}}=\dfrac{mb-2lb'}{bc}, \quad \dfrac{b_{33}}{b_{12}}=\dfrac{lb'^2-mbb'+nb^2}{bc^2}, \quad \dfrac{b_{13}}{b_{12}}=-\dfrac{b'}{c}. \end{cases}$$

Umgekehrt ergeben sich aus diesen sieben Gleichungen die sieben Verhältnisse:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{ac}{b^2}=\dfrac{a_{22}}{a_{13}}, & \dfrac{a'}{b}=2\dfrac{a_{23}b_{12}-a_{22}b_{13}}{a_{13}b_{12}}, \quad \dfrac{a''}{c}=\dfrac{a_{22}b_{13}^2-2a_{23}b_{12}b_{13}+a_{33}b_{12}^2}{a_{13}b_{12}^2}, \\ \dfrac{l}{b}=\dfrac{b_{22}}{b_{12}}, & \dfrac{m}{c}=2\dfrac{b_{23}b_{12}-b_{22}b_{13}}{b_{12}^2}, \quad \dfrac{nb}{c^2}=\dfrac{b_{22}b_{13}^2-2b_{23}b_{12}b_{13}+b_{33}b_{12}^2}{b_{12}^3}, \\ & \dfrac{b'}{c}=-\dfrac{b_{13}}{b_{12}}, \end{cases}$$

gerade diejenigen, welche in den rechts überall noch durch b dividierten Gleichungen § 5, (23) sich als wesentlich ergaben.

Da aber in § 5, (19) nach § 5, (24) ohne Beschränkung $c = b$ genommen werden kann, so fallen die Formeln (7) und (8) vollkommen zusammen mit den Formeln § 3, (13) und (11); auch folgen, da $abcn \neq 0$ und $a_{22}a_{13}b_{12} \neq 0$, mit Rücksicht auf den Wert von n in (8) die Bedingungen § 3, (5).

4. Raumkurve 3. O. und kub. Kegelschnitt. Der *kub. Kegelschnitt* wurde in § 1, **1** als der übrige Durchschnitt eines Kegels und eines Zylinders 2. O. definiert, die eine Erzeugende gemein haben.

Die *allgemeine* (stets rationale) *Raumkurve 3. O.* fand ihren Ausdruck in der Parameterdarstellung § 4, (1).

Nun folgt aus § 3, (10), daß *jeder kub. Kegelschnitt eine Raumkurve 3. O.*, und aus § 6, (5), (6), daß *jede Raumkurve 3. O. ein kub. Kegelschnitt* ist.

In der Tat gelten für beide dieselben Gleichungen § 3, (3); (4) und § 6, (5); (6) von Kegel und Zylinder, sowie dieselben Parameterdarstellungen § 3, (10) und § 5, (19); (24).

5. Arten der Raumkurve 3. O. Die Einteilung der kub. Kegelschnitte in vier Arten nach ihren drei unendlich fernen Punkten § 2, **7** und § 3, **2** und **6** überträgt sich demnach auf die allgemeine Raumkurve 3. O.

Für die bei dieser letzteren möglichen Fälle ist nach § 5, (20):

$$(9)\quad \begin{cases} \text{I. } 4ln - m^2 = 4e^2 > 0; \quad \text{II. } 4ln - m^2 = -4e^2 < 0,\ l \neq 0; \\ \qquad \text{III. } l = 0,\ m \neq 0; \quad \text{IV. } l = 0,\ m = 0; \end{cases}$$

und daher nach § 3, **6** die *allgemeine Raumkurve 3. O.* § 5, (19), (24) *in den vier Fällen* § 5, (20) *eine kub. Ellipse, Hyperbel, hyperbolische Parabel, Parabel.*

6. Vereinfachte Darstellung des kub. Kegelschnittes. Zu den Ergebnissen **4** und **5** ist aber noch ein weiteres getreten. Da nämlich für die *allgemeine Raumkurve 3. O.* § 4, (1) *durch geeignete Veränderung des Parameters λ und des Koordinatensystems $Oxyz$ stets eines der vier speziellen Wertsysteme* § 5, (20) *von l, m, n hergestellt werden kann,* so war die Darstellung des kub. Kegelschnittes § 3, (10), wo die Konstanten l, m, n *allgemeine* Werte mit *fünf* Unterfällen § 3, (15) hatten, *noch nicht die einfachste.*

Man kann also nach § 4, (31) einerseits den zweiten Fall III in § 3, (15) weglassen und andererseits in den Fällen I und II in § 3, (15) $m = 0$ setzen[1]), was eine besondere geometrische Bedeutung hat.

1) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 205.

7. Bedeutung des Verschwindens von m. Nach (7) ist:

$$\frac{b_{22}b_{33} - b_{23}^2}{b_{12}^2} = \frac{4ln - m^2}{4c^2}. \tag{10}$$

Jenachdem dieser Ausdruck positiv (Fall (9) I), negativ (Fälle (9) II und III) oder null (Fall (9) IV), ist der Zylinder (6) ein *elliptischer, hyperbolischer oder parabolischer Zylinder.* Für seine Mittelpunktsachse ist (II § 11, (7)):

$$b_{22}y + b_{23}z - \tfrac{1}{2}b_{12}t = 0, \quad b_{32}y + b_{33}z - \tfrac{1}{2}b_{13}t = 0 \tag{11}$$

oder:

$$y : z : t = b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23} : b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23} : 2(b_{22}b_{33} - b_{23}^2). \tag{12}$$

Unter der Bedingung:

$$m = 0 \quad \text{oder nach (8):} \quad b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23} = 0 \tag{13}$$

liegt die Mittelpunktsachse des Zylinders (6) in der Ebene $z = 0$, oder was, da in (5) $a_{12} = 0$, nach § 3, 1 dasselbe ist:

Die Tangentialebene des Kegels (5) *längs der gemeinsamen Erzeugenden der Flächen* (5) *und* (6) *ist eine Diametralebene des Zylinders* (6).

8. Einfachste Herstellung der kub. Kegelschnitte. Die Raumkurve 3. O. oder der kub. Kegelschnitt kann in allgemeinster Form

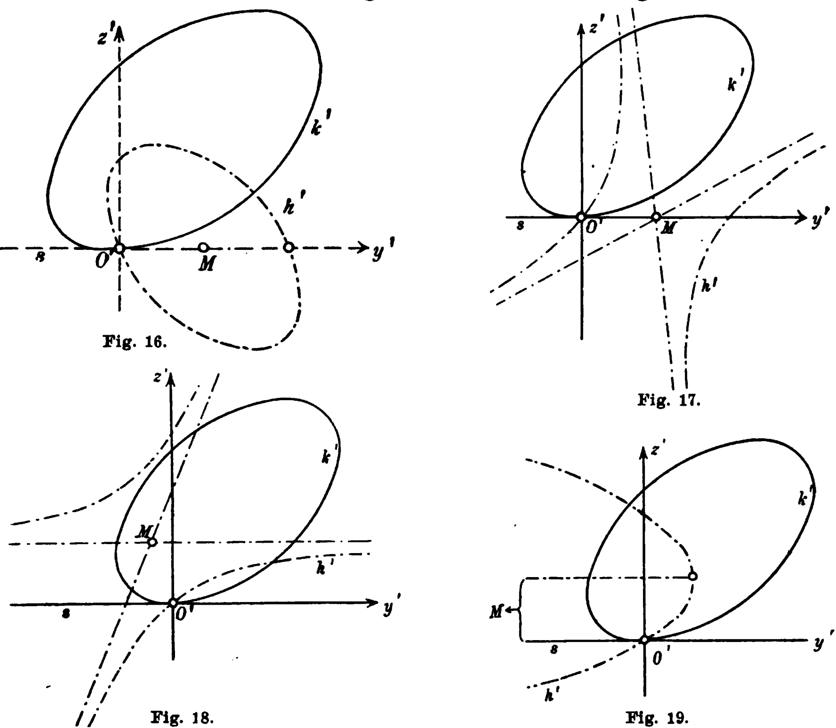


Fig. 16. Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19.

erhalten werden als der übrige *Durchschnitt eines Kegels und eines Zylinders,* die eine Erzeugende gemein haben, ohne sich längs ihrer zu berühren.

Bei der kub. *Ellipse, Hyperbel* und *Parabel* ist der Zylinder bezüglich elliptisch, hyperbolisch und parabolisch und *die Tangentialebene des Kegels längs der gemeinsamen Erzeugenden eine Diametralebene des Zylinders* (beim parabolischen eine Parallelebene zur Hauptebene).

Bei der *hyperbolischen Parabel* ist der Zylinder hyperbolisch und die Tangentialebene des Kegels längs der gemeinsamen Erzeugenden einer Asymptotenebene des Zylinders parallel, aber *nicht selbst Asymptotenebene* (also auch nicht Diametralebene).

Die vier Fälle sind nunmehr durch die Fig. 16—19 gekennzeichnet, welche die Schnittkurven h' und k' von Zylinder und Kegel mit einer zur x-Achse senkrechten Ebene $O'y'z'$ in ihrer Lage gegen die Achsen y' und z' angeben. Für die kub. *Ellipse* in Fig. 16 ist y' nicht nur, wie schon in Fig. 10, die Tangente von k' in O', sondern geht auch durch den Mittelpunkt M von h'. Das Entsprechende gibt Fig. 17 für die kub. *Hyperbel.* In Fig. 18, für die kub. *hyperbol. Parabel,* liegt dagegen M *nicht* auf der Tangente y', während in Fig. 19, für die kub. *Parabel,* wiederum der unendlich ferne Mittelpunkt M von h' auf y' liegt, also y' der Hauptachse der Parabel h' parallel ist.

9. Einfachste analytische Darstellung. *In bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ ist der allgemeine kub. Kegelschnitt gegeben durch die Parameterdarstellung seiner Punkte:*

$$(14)\qquad \begin{cases} \varrho x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda, \\ \varrho y = b\lambda^2 + b'\lambda, \\ \varrho z = c\lambda, \\ \varrho t = l\lambda^2 + m\lambda + n, \end{cases}$$

wo:

$$(15)\qquad abcn \neq 0,$$

und gleichzeitig als Durchschnitt des Kegels und Zylinders:

$$(16)\quad ac^2y^2 + (a'b - 2ab')cyz + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2)z^2 - b^2czx = 0,$$

$$(17)\quad lc^2y^2 + (mb - 2lb')cyz + (lb'^2 - mbb' + nb^2)z^2 - bc^2yt + bb'czt = 0.$$

Er ist eine kub. Ellipse; Hyperbel; hyperbolische Parabel oder Parabel, jenachdem:

$$(18)\qquad \begin{cases} \text{I. } l = 1,\ m = 0,\ n = e^2;\ \text{II. } l = 1,\ m = 0,\ n = -e^2; \\ \text{III. } l = 0,\ m = 1,\ n = -e \textit{ oder } \text{IV. } l = 0,\ m = 0,\ n = 1. \end{cases}$$

Seine unendlich fernen Punkte haben die Parameter:

(19) I. $\lambda = \infty,\ ei,\ -ei$; II. $\lambda = \infty,\ e,\ -e$; III. $\lambda = \infty,\ \infty,\ e$;
IV. $\lambda = \infty,\ \infty,\ \infty$.

Ohne Beschränkung kann entweder:

(20) $$b = c \quad \text{oder} \quad e = 1$$

genommen werden.

II. Kapitel.

Bestandteile des kubischen Kegelschnittes.

§ 7. Die Schmiegungsebenen.

1. Die zugrunde zu legende Darstellung. Wir legen zur weiteren Untersuchung nunmehr die Parameterdarstellung § 6, (14) der *allgemeinen Raumkurve 3. O. im rechtwinkligen Koordinatensystem Oxyz* zugrunde:

(1) $$\varrho x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda,\ \varrho y = b\lambda^2 + b'\lambda,\ \varrho z = c\lambda,\ \varrho t = l\lambda^2 + m\lambda + n.$$

Jeder Punkt der Kurve ist durch seinen Parameter λ vollständig gekennzeichnet und kann daher kurz als „*Punkt* λ“ bezeichnet werden.[1])

Die Gleichungen (1) sind nach § 6, (1) auch in der Form darstellbar:

(2) $$\sigma\lambda^3 = y_1,\ \sigma\lambda^2 = y_2,\ \sigma\lambda = y_3,\ \sigma = y_4,$$

wo y_1, y_2, y_3, y_4 als Abkürzungen gebraucht sind für die in x, y, z, t linearen Funktionen (s. § 35, (3)):

(3) $$\begin{cases} y_1 = n\{c(bx - a'y) + (a'b' - a''b)z\}, & y_2 = an(cy - b'z), \\ y_3 = abnz, \quad y_4 = a\{-cly + (b'l - bm)z + bct\}. \end{cases}$$

2. Die Verbindungsebene dreier Kurvenpunkte. Für einen Punkt λ_i der Kurve haben die rechtwinkligen Koordinaten die Werte (1) mit $\lambda = \lambda_i$, die mit ihnen gebildeten Funktionen (3) aber nach (2) bis auf einen gemeinsamen Faktor die Werte:

(4) $$y_1 = \lambda_i^3,\quad y_2 = \lambda_i^2,\quad y_3 = \lambda_i,\quad y_4 = 1.$$

Nun stellt die Gleichung (s. § 24, (28)):

(5) $$y_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)y_2 + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)y_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 y_4 = 0$$

mit Rücksicht auf (3) eine Ebene in laufenden Koordinaten x, y, z, t dar. Sie wird aber ersichtlich identisch erfüllt, wenn man für y_1, y_2, y_3, y_4

1) W. Fr. Meyer, Apolarität und rationale Kurven (1883), S. 48.

die Werte (4) mit $i = 1, 2$ oder 3, oder was dasselbe ist, für x, y, z, t die Koordinaten der drei Punkte λ_1, λ_2 oder λ_3 der Kurve setzt.

Die Gleichung (5) *stellt also die Verbindungsebene der drei Punkte* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *dar; sie lautet, nach* x, y, z, t *geordnet:*

$$(6)\quad bcnx + \{al\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - an(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - a'n\}cy$$
$$+\{a(bm-b'l)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + abn(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2) + ab'n(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + (a'b'-a''b)n\}z$$
$$- abc\lambda_1\lambda_2\lambda_3 t = 0.$$

3. Tangentialebenen. Fallen von den *drei* Punkten, die eine Ebene nach § 4, **3**, I mit der Kurve gemein hat, *zwei in einen* zusammen, so wird die Ebene eine *Tangentialebene* in diesem Punkte, ihrem *Berührungspunkte*. In jedem Punkte λ der Kurve gibt es ∞^1 Tangentialebenen, die ein Büschel bilden. Jede einzelne hat außer ihrem doppelt zählenden *Berührungspunkt* λ *noch einen Punkt* λ_0 mit der Kurve gemein und hat als Verbindungsebene der drei Punkte $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \lambda_0$ nach (5) und (6) die Gleichung:

$$(7)\quad y_1 - (2\lambda + \lambda_0)y_2 + \lambda(\lambda + 2\lambda_0)y_3 - \lambda^2\lambda_0 y_4 = 0,$$

oder ausführlich geschrieben:

$$(8)\quad bcnx + \{al\lambda^2\lambda_0 - an(2\lambda + \lambda_0) - a'n\}cy$$
$$+\{a(bm - b'l)\lambda^2\lambda_0 + abn\lambda(\lambda + 2\lambda_0) + ab'n(2\lambda + \lambda_0) + (a'b' - a''b)n\}z$$
$$- abc\lambda^2\lambda_0 t = 0.$$

4. Schmiegungsebenen. Fallen die *drei* Punkte, die eine Ebene mit der Kurve gemein hat, *alle drei in einen* zusammen, so wird die Ebene eine *Schmiegungsebene* in diesem Punkte, ihrem *Schmiegungspunkt*. In jedem Punkte λ der Kurve gibt es eine Schmiegungsebene. Sie hat als Verbindungsebene der drei Punkte $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \lambda$ nach (5) und (6) die Gleichung:

$$(9)\quad y_1 - 3\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3 - \lambda^3 y_4 = 0,$$

oder ausführlich:

$$(10)\quad bcnx + (al\lambda^3 - 3an\lambda - a'n)cy$$
$$+\{a(bm - b'l)\lambda^3 + 3abn\lambda^2 + 3ab'n\lambda + (a'b' - a''b)n\}z - abc\lambda^3 t = 0.$$

5. Parameterdarstellung der Schmiegungsebenen. Für die *Koordinaten* u, v, w, s *der Schmiegungsebene im Punkte* λ folgt aus (10) mit einem Proportionalitätsfaktor σ:

$$(11)\quad \begin{cases} \sigma u = bcn, \quad \sigma v = c(al\lambda^3 - 3an\lambda - a'n), \\ \sigma w = a(bm - b'l)\lambda^3 + 3abn\lambda^2 + 3ab'n\lambda + (a'b' - a''b)n, \\ \sigma s = -abc\lambda^3. \end{cases}$$

Da hierin die Determinante der Koeffizienten von $\lambda^3, \lambda^2, \lambda^1, \lambda^0$ den Wert $(abcn)^3$ hat, also nach § 6, (15) von 0 verschieden ist, so folgt wie in § 4, **1**; **2**, daß die Beziehung zwischen Parameter λ und Ebene u, v, w, s *wechselseitig·eindeutig* ist. Jedem Parameter λ entspricht eine „*Schmiegungsebene* λ" und umgekehrt.

Die Auflösung der Gleichungen (11) nach den Potenzen von λ gibt ebenso wie in (2), (3) mit einem Faktor ϱ:

$$(12) \qquad \varrho = v_1, \quad -3\varrho\lambda = v_2, \quad 3\varrho\lambda^2 = v_3, \quad -\varrho\lambda^3 = v_4,$$

wo v_1, v_2, v_3, v_4 als Abkürzungen gebraucht sind für die in u, v, w, s linearen Funktionen (§ 35, (4)):

$$(13)\ v_1 = au,\ v_2 = a'u + bv + ls,\ v_3 = a''u + b'v + cw + ms,\ v_4 = ns.$$

6. Die Klasse der Raumkurve 3. O. Soll eine Ebene (11) durch einen gegebenen Punkt:

$$(14) \qquad xu + yv + zw + ts = 0$$

des Raumes hindurchgehen, so muß λ der Bedingung entsprechen (§ 4, **3**):

$$(15) \quad a(cly + (bm - b'l)z - bct)\lambda^3 + 3abnz\lambda^2 - 3an(cy - b'z)\lambda \\ + n(bcx - a'cy + (a'b' - a''b)z) = 0,$$

wo wiederum die vier Koeffizienten der Potenzen von λ nach § 6, (15) für keinen Punkt x, y, z, t alle verschwinden können.

Durch jeden gegebenen Punkt des Raumes gehen daher drei Schmiegungsebenen der Raumkurve 3. O. hindurch.

Die Raumkurve 3. Ordnung ist auch von der 3. Klasse[1]) (s. § 24, **10**).

7. Der Schnittpunkt von drei Schmiegungsebenen. Mit Rücksicht auf (13) stellt die Gleichung:

$$(16)\quad 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 v_1 + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)v_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)v_3 + 3v_4 = 0$$

in laufenden Koordinaten u, v, w, s einen Punkt dar (vgl. (5)). Sie wird aber identisch erfüllt, wenn man für v_1, v_2, v_3, v_4 die Werte:

$$(17) \qquad v_1 = 1, \quad v_2 = -3\lambda_i, \quad v_3 = 3\lambda_i^2, \quad v_4 = -\lambda_i^3$$

mit $i = 1, 2$ oder 3 (vgl. (4)) einsetzt oder, was wegen des Zusammenhanges der Gleichungen (11) und (12) dasselbe ist, für u, v, w, s die Koordinaten der drei Schmiegungsebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Die Gleichung (16) stellt also den Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dar; sie lautet, nach u, v, w, s geordnet (vgl. (6)):

1) H. Schröter, Oberfl. 2. O. u. Raumkurven 3. O. (1880), S. 272.

$$(18)\quad \{3a\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + a'(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) + a''(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\}u$$
$$+ \{b(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) + b'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\}v$$
$$+ c(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)w$$
$$+ \{l(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) + m(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 3n\}s = 0.$$

8. Tangentenpunkte und Schmiegungspunkte. Fallen von den *drei* Schmiegungsebenen, die nach 6 durch einen Punkt gehen, *zwei* zusammen, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, während der dritte $\lambda_3 = \lambda_0$ getrennt bleibt, so wird der Punkt ein *„Tangentenpunkt in der Schmiegungsebene* λ" und seine Gleichung nach (16):

$$(19)\qquad 3\lambda^2\lambda_0 v_1 + \lambda(\lambda + 2\lambda_0)v_2 + (2\lambda + \lambda_0)v_3 + 3v_4 = 0.$$

Fallen endlich *alle drei* Schmiegungsebenen, die durch einen Punkt gehen, zusammen, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, so wird der Punkt ein *„Schmiegungspunkt in der Schmiegungsebene* λ" und seine Gleichung nach (16):

$$(20)\qquad \lambda^3 v_1 + \lambda^2 v_2 + \lambda v_3 + v_4 = 0.$$

Da hier nach Einsetzung der Werte (13) die Koeffizienten von u, v, w, s mit den rechten Seiten von (1) übereinstimmen, *ist der Schmiegungspunkt in der Schmiegungsebene* λ *der Punkt* λ *der Raumkurve.*

Wie also zu jedem Punkte λ der Raumkurve eine Schmiegungsebene (11) gehört, so gehört auch zu jeder Schmiegungsebene λ ein Punkt (1) der Raumkurve.

Die Raumkurve ist als Inbegriff ihrer Punkte und Schmiegungsebenen sowohl durch die Gleichungen (1) wie durch die Gleichungen (11) bestimmt.

9. Darstellung der Raumkurve durch drei Gleichungen. Die Gleichungen § 6, (2), die den Punkt λ der Raumkurve als Durchschnitt von drei Ebenen bestimmen, lauten mit den Abkürzungen (3):

$$(21)\qquad y_1 - \lambda y_2 = 0,\quad y_2 - \lambda y_3 = 0,\quad y_3 - \lambda y_4 = 0.$$

Durch Elimination von λ aus je zwei Gleichungen (21) ergibt sich, daß *jeder Punkt der Raumkurve 3. O. auf den drei Flächen 2. O. liegt:*

$$(22)\quad f = y_2 y_4 - y_3^2 = 0,\ g = y_2 y_3 - y_1 y_4 = 0,\ h = y_1 y_3 - y_2^2 = 0.$$

Die erste und dritte Fläche sind der schon § 6, (3) erhaltene Kegel und Zylinder. Aus ihren Gleichungen:

$$y_4 y_2 - y_3 y_3 = 0,\quad y_2 y_2 - y_1 y_3 = 0$$

folgt nun, indem man sie als linear und homogen in y_2 und y_3 auffaßt, daß entweder $y_2 = 0$ und $y_3 = 0$ oder die Determinante $y_4 y_1 - y_3 y_2 = 0$ (I Anm. 2, I, (7)). Jeder auf der ersten und dritten Fläche (22) liegende Punkt liegt daher auch auf der zweiten, es sei denn, daß für ihn $y_2 = 0$ und $y_3 = 0$ oder nach (3) $y = 0$, $z = 0$, daß er also auf der gemeinsamen Erzeugenden von Kegel und Zylinder § 6, (3) liegt. Die Hinzufügung der mittleren Gleichung (22) ermöglicht also die *Abscheidung* dieser gemeinsamen Erzeugenden (§ 6, 2) von der Gesamtschnittkurve von Kegel und Zylinder.

I. *Jeder allen drei Gleichungen (22) genügende Punkt ist ein Punkt der Raumkurve 3. O., und jeder Punkt der Raumkurve genügt allen drei Gleichungen (22).*

In diesem Sinne ist die Raumkurve 3. O. durch die *drei* Gleichungen (22) mit der Bedeutung (3) von y_1, y_2, y_3, y_4 dargestellt.

Das Entsprechende gilt für die Schmiegungsebenen. Es folgen zunächst aus (12) die Gleichungen:

(23) $$3v_4 + \lambda v_3 = 0, \quad v_3 + \lambda v_2 = 0, \quad v_2 + 3\lambda v_1 = 0$$

und durch Elimination von λ die Gleichungen von drei Flächen 2. Klasse:

(24) $$F = 3v_1 v_3 - v_2^2 = 0, \quad G = 9v_1 v_4 - v_2 v_3 = 0, \quad H = 3v_2 v_4 - v_3^2 = 0.$$

II. *Jede allen drei Gleichungen (24) genügende Ebene ist eine Schmiegungsebene der Raumkurve und umgekehrt.*

10. Die unendlich ferne Ebene als Bestandteil der Raumkurve. Die vorstehenden Entwicklungen **1—9** gelten für allgemeine Werte von l, m, n in (1). Nach den Angaben § 6, (18); (19) über die besonderen Werte, welche l, m, n für die einzelnen Arten der kub. Kegelschnitte haben, ergibt sich nun aus den Begriffen in **2—4**:

I. II. Bei der kub. *Ellipse* und *Hyperbel* ist *die unendlich ferne Ebene die Verbindungsebene* dreier getrennter Punkte der Kurve.

III. Bei der *hyperbolischen Parabel* ist sie diejenige *Tangentialebene* in dem doppelt zählenden Punkte $\lambda = \infty$, die noch durch den Punkt $\lambda = e$ geht.

IV. Bei der *Parabel* ist sie die *Schmiegungsebene* im Punkte $\lambda = \infty$.

In der Tat folgt auch aus (11), wenn man zunächst die Werte § 6, (18), IV für l, m, n einsetzt und dann $\lambda = \infty$ nimmt: $u, v, w, s = 0, 0, 0, 1$ (I § 47, (7)).

11. Asymptotenebenen. Ist die Schmiegungsebene in einem (reellen) unendlich fernen Punkte der Kurve nicht die unendlich ferne Ebene selbst, so heißt sie eine *Asymptotenebene.*

I. Die kub. *Ellipse* hat nach § 6, (19) *eine* Asymptotenebene, deren *Gleichung* sich aus (10) für $l = 1$, $m = 0$, $n = e^2$ ergibt, wenn alsdann $\lambda = \infty$ gesetzt wird:

$$(25)\qquad cy - b'z - bct = 0.$$

II. Die kub. *Hyperbel* hat *drei* Asymptotenebenen, deren *Gleichungen* sich aus (10) für $l = 1$, $m = 0$, $n = -e^2$ ergeben mit $\lambda = \infty$, εe, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist:

$$(26)\quad \begin{cases} cy - b'z - bct = 0, \\ bcx - (4a\varepsilon e + a')cy + (4ab'\varepsilon e + 3abe^2 + a'b' - a''b)z + abc\varepsilon e t = 0. \end{cases}$$

III. Die kub. *hyperbolische Parabel* hat *zwei* Asymptotenebenen, deren *Gleichungen* sich aus (10) für $l = 0$, $m = 1$, $n = -e$ ergeben mit $\lambda = \infty$ und $\lambda = e$:

$$(27)\quad \begin{cases} z - ct = 0, \\ bcx - (3ae + a')cy + (2abe^2 + 3ab'e + a'b' - a''b)z + abce^2 t = 0. \end{cases}$$

IV. Die kub. *Parabel* hat *keine* Asymptotenebene.

§ 8. Sehnen, Achsen und Tangenten.

1. Begriff und Gleichungen der Sehne. Die Verbindungslinie zweier Punkte λ_1 und λ_2 der Raumkurve 3. O. heißt eine *Sehne* (vgl. § 4, 3, II).

Indem man sie als Schnittlinie der Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \infty$ in § 7, (5) auffaßt, erhält man als Gleichungen der Sehne $\lambda_1 \lambda_2$:

$$(1)\quad y_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)y_2 + \lambda_1\lambda_2 y_3 = 0, \quad y_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)y_3 + \lambda_1\lambda_2 y_4 = 0.$$

Es folgt also mit Rücksicht auf § 7, (3):

Die Gleichungen der Sehne $\lambda_1\lambda_2$ der Kurve § 7, (1) sind in laufenden Punktkoordinaten x, y, z, t:

$$(2)\quad \begin{cases} bcx - \{a(\lambda_1+\lambda_2)+a'\}cy + \{ab\lambda_1\lambda_2 + ab'(\lambda_1+\lambda_2) + a'b' - a''b\}z = 0, \\ (l\lambda_1\lambda_2 - n)cy + \{(bm - b'l)\lambda_1\lambda_2 + bn(\lambda_1+\lambda_2) + b'n\}z - bc\lambda_1\lambda_2 t = 0. \end{cases}$$

2. Begriff und Gleichungen der Achse. Die Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen λ_1 und λ_2 der Raumkurve 3. O. heißt eine *Achse*.[1])

1) W. F. Meyer, Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883, S. 47; R. Sturm, Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), S. 2; Reye, Geom. d. L. 2 (1892), S. 202; „Linie in zwei Ebenen" bei A. Cayley, J. de math. (1) 10 (1845), S. 245; „Doppelachse" bei H. Schubert, Kalkül d. abzähl. Geom., Leipzig 1879, S. 163; „Biplanare" bei Th. Reye, Geom. d. Lage 2 (1907), S. 28; „Schmiegungsachse" bei Sturm, Geom. Verwandtsch. 1 (1908), S. 314.

Indem man sie als Verbindungslinie der beiden Punkte ansieht, durch welche die drei Schmiegungsebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \infty$ in § 7, (16) hindurchgehen, werden die Gleichungen der Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$:

(3) $\lambda_1 \lambda_2 v_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_3 + 3 v_4 = 0, \quad 3 \lambda_1 \lambda_2 v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_2 + v_3 = 0,$

oder mit den Werten § 7, (13):

Die Gleichungen der Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ der Kurve § 7, (1) sind in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s:

$$(4) \begin{cases} \{a' \lambda_1 \lambda_2 + a''(\lambda_1 + \lambda_2)\} u + \{b \lambda_1 \lambda_2 + b'(\lambda_1 + \lambda_2)\} v + c(\lambda_1 + \lambda_2) w \\ \qquad + \{l \lambda_1 \lambda_2 + m(\lambda_1 + \lambda_2) + 3n\} s = 0, \\ \{3a \lambda_1 \lambda_2 + a'(\lambda_1 + \lambda_2) + a''\} u + \{b(\lambda_1 + \lambda_2) + b'\} v + cw \\ \qquad + \{l(\lambda_1 + \lambda_2) + m\} s = 0. \end{cases}$$

3. Sehne durch einen Punkt. Für die durch einen gegebenen Punkt x, y, z, t gehende Sehne ist nach (1) mit den § 7, (22) eingeführten Abkürzungen:

$$(5) \qquad 1 : -(\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1 \lambda_2 = f : g : h,$$

so daß λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(6) \qquad f \lambda^2 + g \lambda + h = 0$$

werden. Da deren Koeffizienten aber nach § 7, **9**, I nur für einen Punkt der Raumkurve selbst alle drei verschwinden können, so folgt:

Durch jeden nicht auf der Raumkurve selbst ligenden Punkt des Raumes geht eine bestimmte Sehne der Kurve (die Kurve hat einen „scheinbaren Doppelpunkt“).

Die Sehne heißt eine *eigentliche* oder *uneigentliche*, jenachdem ihre Endpunkte λ_1 und λ_2 reell oder konjugiert imaginär sind.

4. Achse in einer Ebene. Für die in einer gegebenen Ebene u, v, w, s liegende Achse folgt aus (3) mit der Bezeichnung § 7, (24):

$$(7) \qquad \lambda_1 \lambda_2 : -(\lambda_1 + \lambda_2) : 1 = H : G : F$$

und daher die quadratische Gleichung:

$$(8) \qquad F \lambda^2 + G \lambda + H = 0$$

und wie vorhin nach § 7, **9**, II:

In jeder Ebene des Raumes, die nicht selbst Schmiegungsebene ist, liegt eine bestimmte Achse der Raumkurve.

5. Begriff und Gleichungen der Tangente. Wenn die beiden Punkte λ_1 und λ_2 der Kurve, welche die Sehne verbindet, in einen Punkt λ zusammenfallen, so geht die Sehne in die *Tangente im Punkte* λ über. Aus (2) folgt alsdann:

Die Gleichungen der Tangente im Punkte λ der Raumkurve § 7, (1) *sind in laufenden Punktkoordinaten:*

$$(9)\quad \begin{cases} bcx - (2a\lambda + a')cy + (ab\lambda^2 + 2ab'\lambda + a'b' - a''b)z = 0, \\ (l\lambda^2 - n)cy + \{(bm - b'l)\lambda^2 + 2bn\lambda + b'n\}z - bc\lambda^3 t = 0. \end{cases}$$

Wenn die beiden Schmiegunsebenen λ_1 und λ_2, die eine Achse bestimmen, in eine Schmiegungsebene λ zusammenfallen, so geht die Achse in die *Tangente in der Schmiegungsebene* λ über. Aus (4) folgt alsdann:

Die Gleichungen der Tangente in der Schmiegungsebene λ der Raumkurve § 7, (1) *sind in laufenden Ebenenkoordinaten:*

$$(10)\quad \begin{cases} (a'\lambda + 2a'')\lambda u + (b\lambda + 2b')\lambda v + 2c\lambda w + (l\lambda^2 + 2m\lambda + 3n)s = 0, \\ (3a\lambda^2 + 2a'\lambda + a'')u + (2b\lambda + b')v + cw + (2l\lambda + m)s = 0. \end{cases}$$

6. Parameterdarstellung der Tangenten. Die Tangenten (9) und (10) sind identisch. Denn die aus beiden Darstellungen (9) und (10) berechneten Strahlenkoordinaten (I § 48, (3); (3'); (10)) sind dieselben, und zwar ergibt sich:

Die Strahlenkoordinaten der Tangente der Raumkurve § 7, (1) *im Punkte λ und in der Schmiegungsebene λ sind bis auf einen Faktor ϱ:*

$$(11)\quad \begin{cases} \varrho p_{23} = bc\lambda^2,\ \varrho p_{31} = -(2a\lambda + a')c\lambda^2,\ \varrho p_{12} = (ab\lambda^2 + 2ab'\lambda + a'b' - a''b)\lambda^2, \\ \varrho p_{14} = al\lambda^4 + 2am\lambda^3 + (3an + a'm - a''l)\lambda^2 + 2a'n\lambda + a''n, \\ \varrho p_{24} = (bm - b'l)\lambda^2 + 2bn\lambda + b'n,\ \varrho p_{34} = -c(l\lambda^2 - n). \end{cases}$$

7. Linearer Komplex der Tangenten. Die Strahlenkoordinaten (11) erfüllen identisch in λ die Gleichung:

$$(12)\quad -(3an - a'm + a''l)p_{23} + (bm - b'l)p_{31} - clp_{12} + bcp_{14} - a'cp_{24} + (a'b' - a''b)p_{34} = 0.$$

Die Tangenten der Raumkurve gehören alle dem linearen Komplex (12) *an.* Bezeichnet man den Koeffizienten von p_{kl} in (12) mit a_{kl}, so ist:

$$(13)\quad D = a_{23}a_{14} + a_{31}a_{24} + a_{12}a_{34} = -3abcn.$$

Der lineare Komplex (12) ist daher bei positiv orientiertem Koordinatensystem $Oxyz$ *positiv oder negativ gewunden* (II § 87, 6), jenachdem:

$$(14)\quad abcn < 0 \text{ oder } > 0.$$

8. Der Schraubensinn der Raumkurve. Eine durch die Parameterdarstellung:

$$(15)\quad x = \varphi(\lambda), \qquad y = \psi(\lambda), \qquad z = \chi(\lambda)$$

gegebene Raumkurve überhaupt hat in jedem Punkte λ einen bestimmten Schraubensinn (I § 32, 7), der positiv oder negativ ist, jenachdem die Determinante:

$$(16)\quad \Delta = \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix},$$

in der x', x'', x''', y', ... die 1., 2. und 3. Differentialquotienten nach λ bedeuten, positiv oder negativ ist.

Beim Übergang zu homogenen Koordinaten, wo an Stelle von (15):

$$x = \varphi(\lambda), \quad y = \psi(\lambda), \quad z = \chi(\lambda), \quad t = \omega(\lambda) \tag{17}$$

und in (16) $x:t$, $y:t$, $z:t$ an Stelle von x, y, z tritt, wird nach einfacher Determinantenumformung:

$$\Delta = -\frac{1}{t^4}\begin{vmatrix} x & x' & x'' & x''' \\ y & y' & y'' & y''' \\ z & z' & z'' & z''' \\ t & t' & t'' & t''' \end{vmatrix} \tag{18}$$

was mit $t = 1$, $t' = t'' = t''' = 0$ wieder in (16) übergeht.

Für die Raumkurve 3. O. § 6, (14) wird nun aus (18) unter Berechnung der Differentialquotienten:

$$\Delta = -\frac{12\,abcn}{t^4}. \tag{19}$$

Die Raumkurve 3. O. § 6, (14) hat bei positiv orientiertem Koordinatensystem Oxyz in allen ihren Punkten[1]) *positiven oder negativen Schraubensinn, jenachdem, wie in (14):*

$$abcn < 0 \text{ oder } > 0. \tag{20}$$

9. Pol und Polarebene. Jeder lineare Komplex:

$$a_{23}p_{23} + a_{31}p_{31} + a_{12}p_{12} + a_{14}p_{14} + a_{24}p_{24} + a_{34}p_{34} = 0 \tag{21}$$

bestimmt eine *involutorische reziproke Verwandtschaft* im Raume, bei der je ein Punkt und ein Ebene als *Pol und Polarebene* einander entsprechen. Zwischen den Koordinaten x, y, z, t von Pol und u, v, w, s von Polarebene bestehen die Beziehungen (II § 86, 5; 6):[2])

$$(22)\quad \begin{cases} \varrho u = \phantom{-a_{12}x} a_{12}y - a_{31}z + a_{14}t, & \sigma x = \phantom{-a_{34}u} a_{34}v - a_{24}w + a_{23}s, \\ \varrho v = -a_{12}x \phantom{+a_{12}y} + a_{23}z + a_{24}t, & \sigma y = -a_{34}u \phantom{+a_{34}v} + a_{14}w + a_{31}s \\ \varrho w = a_{31}x - a_{23}y \phantom{+a_{23}z} + a_{34}t, & \sigma z = a_{24}u - a_{14}v \phantom{+a_{14}w} + a_{12}s, \\ \varrho s = -a_{14}x - a_{24}y - a_{34}z; & \sigma t = -a_{23}u - a_{31}v - a_{12}w; \end{cases}$$

die einen sind die Auflösungen der anderen, mit zwei Proportionalitätsfaktoren ϱ und σ.

Für den Komplex (12) lauten diese Beziehungen:

$$(23)\quad \begin{cases} \varrho u = -cly - (bm - b'l)z + bct, \\ \varrho v = clx - (3an - a'm + a''l)z - a'ct, \\ \varrho w = (bm - b'l)x + (3an - a'm + a''l)y + (a'b' - a''b)t, \\ \varrho s = -bcx + a'cy - (a'b' - a''b)z; \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} \sigma x = (a'b' - a''b)v + a'cw - (3an - a'm + a''l)s, \\ \sigma y = -(a'b' - a''b)u + bcw + (bm - b'l)s \\ \sigma z = -a'cu - bcv - cls, \\ \sigma t = (3an - a'm + a''l)u - (bm - b'l)v + clw. \end{cases}$$

---

1) R. Baltzer, Anal. Geom., Leipzig 1882, S. 475.

2) Möbius, J. f. Math. 10 (1833), S. 320; Werke 1, S. 494.

I. Wir nennen die hierdurch verbundenen Elemente x, y, z, t und u, v, w, s *Pol und Polarebene in bezug auf die Raumkurve 3. O.* § 7, (1), da sie auch für diese eine selbständige von dem Komplex unabhängige Bedeutung haben, die sich später (§ 29, 1; 14; § 35, 2) ergeben wird, nämlich:

II. *Die Polarebene Π eines Punktes P ist die Verbindungsebene der Schmiegungspunkte der drei durch P gehenden Schmiegungsebenen* (§ 7, 6); *der Pol P einer Ebene Π ist der Schnittpunkt der Schmiegungsebenen der drei in Π liegenden Kurvenpunkte* (wie beim ebenen Kegelschnitt die Polare p eines Punktes P die Verbindungslinie der Berührungspunkte der zwei durch P gehenden Tangenten und der Pol P einer Geraden p der Schnittpunkt der Tangenten der zwei in p liegenden Kurvenpunkte).

10. Achse in der unendlich fernen Ebene. Mit den Koordinaten $u, v, w, s = 0, 0, 0, 1$ der unendlich fernen Ebene wird nach § 7, (13):

$$v_1 = 0,\ v_2 = l,\ v_3 = m,\ v_4 = n \tag{25}$$

und nach § 7, (24):

$$F = -l^2,\ G = -lm,\ H = 3ln - m^2, \tag{26}$$

sodaß nach (8) folgt:

Die in der unendlich fernen Ebene liegende Achse der Raumkurve 3. O. § 7, (1) *ist durch die quadratische Gleichung bestimmt:*

$$l^2\lambda^2 + lm\lambda + (m^2 - 3ln) = 0. \tag{27}$$

11. Parallele Schmiegungsebenen. Für die kub. Ellipse und Hyperbel wird die Gleichung (27) nach § 6, (18):

$$\text{I. } \lambda^2 - 3e^2 = 0;\quad \text{II. } \lambda^2 + 3e^2 = 0, \tag{28}$$

und für die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 ist:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,\ \lambda_1\lambda_2 = -3\varepsilon e^2 \tag{29}$$

mit $\varepsilon = 1$ für die Ellipse und $\varepsilon = -1$ für die Hyperbel. Aus (4) folgt daher:

Die Gleichungen der in der unendlich fernen Ebene liegenden Achse der kub. Ellipse ($\varepsilon = 1$) *oder Hyperbel* ($\varepsilon = 1$) (§ 7, (1); § 6, (18)) *lauten:*

$$a'u + bv = 0,\ (-9a\varepsilon e^2 + a'')u + b'v + cw = 0. \tag{30}$$

I. Bei der kub. Ellipse sind die beiden durch diese Achse gehenden Schmiegungsebenen:

$$\lambda_1 = -e\sqrt{3},\ \lambda_2 = e\sqrt{3} \tag{31}$$

reell und, da sie eine unendlich ferne Gerade gemein haben, parallel, und folgt aus § 7, (10) und § 6, (18), I:

Die Gleichungen der beiden parallelen Schmiegungsebenen[1]) *der kub. Ellipse sind:*

$$c(bx - a'y) + (9abe^2 + a'b' - a''b)z \pm 3\sqrt{3}\,abcet = 0. \tag{32}$$

1) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 204.

II. *Die kub. Hyperbel,* bei der die beiden durch die Achse (30) gehenden Schmiegungsebenen nicht reell sind, *hat keine parallelen Schmiegungsebenen.*

III. Bei *der kub. hyperbolischen Parabel* § 6, (18), III hat die Gleichung (27) die Doppelwurzel $\lambda = \infty$. *Die in der unendlich fernen Ebene liegende Achse wird daher die Tangente* in der Schmiegungsebene $\lambda = \infty$, die zu dem doppelt zählenden unendlich fernen Punkt $\lambda = \infty$ der Kurve (§ 6, (19), III) gehört.

Die kub. hyperbolische Parabel hat eine unendliche ferne Tangente.

Ihre Gleichungen lauten nach (9) mit $l = 0$, $m = 1$, $n = -e$ und dann $\lambda = \infty$:

(33) $$z = 0, \; t = 0,$$

und die zugehörige Schmiegungsebene ist nach § 7, (27):

(34) $$z - ct = 0.$$

IV. Bei der *kub. Parabel* § 6, (18), IV verschwinden alle Koeffizienten der Gleichung (27), wie denn nach § 7, **10**, IV die unendlich ferne Ebene selbst Schmiegungsebene ist und die Ausnahme von Satz **4** eintritt.

12. Die Asymptoten der kub. Kegelschnitte. Ist die Tangente in einem unendlich fernen Punkte der Kurve nicht selbst unendlich fern[1]), so heißt sie eine *Asymptote.*

I. *Die kub. Ellipse hat eine Asymptote,* die Tangente in dem einzigen unendlich fernen Punkte $\lambda = \infty$ (§ 6, (19), I). Ihre Gleichungen sind nach (9) mit $l = 1$, $m = 0$, $n = e^2$; $\lambda = \infty$:

(35) $$y - bt = 0, \; z = 0.$$

II. *Die kub. Hyperbel hat drei Asymptoten,* die Tangenten in ihren drei unendlich fernen Punkten $\lambda = \infty$, $\lambda = \varepsilon e$ $(\varepsilon = \pm 1)$ (§ 6, (19), II). Ihre Gleichungen lauten nach (9):

(36) $$y - bt = 0, \; z = 0:$$

(37) $$\begin{cases} bcx - (2a\varepsilon e + a')cy + (abe^2 + 2ab'\varepsilon e + a'b' - a''b)z = 0, \\ 2cy - 2(b\varepsilon e + b')z - bct = 0. \end{cases}$$

III. *Die kub. hyperbolische Parabel hat* (vgl. **11**, (33)) *eine Asymptote,* die Tangente in ihrem einfach zählenden unendlich fernen Punkte $\lambda = e$ (§ 6, (19), III). Ihre Gleichungen lauten nach (9):

(38) $$\begin{cases} bcx - (2ae + a')cy + (abe^2 + 2ab'e + a'b' - a''b)z = 0, \\ cy - (be + b')z - bcet = 0. \end{cases}$$

---

1) Schröter, Oberfl. 2. O. (1880), S. 308.

IV. *Die kub. Parabel hat keine Asymptote,* da die Tangente in dem dreifach zählenden unendlich fernen Punkte $\lambda = \infty$ (§ 6, (19), IV):

$$z = 0,\ t = 0 \tag{39}$$

im Unendlichen liegt.

§ 9. Die Sehnenkegel.

1. Begriff des Sehnenkegels. Eliminiert man λ_2 aus den Gleichungen der Sehne $\lambda_1\ \lambda_2$ in § 8, (1), so erhält man, mit λ statt λ_1, für den Ort aller durch den Punkt λ der Kurve gehenden Sehnen:

$$(y_1 - \lambda y_2)(y_3 - \lambda y_4) - (y_2 - \lambda y_3)^2 = 0 \tag{1}$$

oder, nach λ geordnet mit Benutzung der Abkürzungen § 7, (22):

$$\lambda^2 f + \lambda g + h = 0. \tag{2}$$

Der Ort ist nach seiner Entstehung ein Kegel und nach seiner Gleichung von der 2. Ordnung:

Die Sehnen, die einen festen Punkt λ der Raumkurve 3. O. mit allen übrigen Punkten der Kurve verbinden, bilden einen Kegel 2. O., den „Sehnenkegel des Punktes λ".

2. Gleichung des Sehnenkegels in gemeinen Koordinaten. Setzt man in die drei Ausdrücke § 7, (22) die Werte § 7, (3) ein, so wird mit Unterdrückung des gemeinsamen Faktors — an:

$$(3)\begin{cases} f = a\{c^2ly^2 + (bm - 2b'l)cyz + (b^2n - bb'm + b'^2l)z^2 - bc^2yt + bb'czt\}, \\ g = a'c^2ly^2 - ((an - a'm)b + (2a'b' - a''b)l)cyz \\ \quad + (abb'n - (a'b' - a''b)(bm - b'l))z^2 - (bm - b'l)bczx - bc^2lxy \\ \quad + b^2c^2xt - a'bc^2yt + (a'b' - a''b)bczt, \\ h = n\{ac^2y^2 + (a'b - 2ab')cyz + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2)z^2 - b^2czx\}. \end{cases}$$

Denkt man sich wiederum diese Werte in (2) eingesetzt, so hat man *die Gleichung des Sehnenkegels des Punktes λ der Raumkurve 3. O. § 7, (1) im rechtwinkligen System Oxyz.*

Man erhält sie auch aus den Gleichungen § 8, (2) durch Elimination von λ_2 und mit λ für λ_1, in der Form:

$$(4)\quad \{bcx - (a\lambda + a')cy + (ab'\lambda + a'b' - a''b)z\}$$
$$\times\{cl\lambda y + ((bm - b'l)\lambda + bn)z - bc\lambda t\} - an\{cy - (b\lambda + b')z\}^2 = 0.$$

Nach den Koordinaten geordnet, nimmt sie die Form an:

$$(5)\ a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0,$$

wo die Koeffizienten nach (2) und (3) die Werte haben:

$$(6)\quad a_{22} = (al\lambda^2 + a'l\lambda + an)c^2,\; a_{33} = a(b^2n - bb'm + b'^2l)\lambda^2$$
$$+ abb'n - (a'b' - a''b)(bm - b'l))\lambda + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2)n,$$
$$2a_{23} = \{a(bm-2b'l)\lambda^2-((an-a'm)b+(2a'b'-a''b)l)\lambda+(a'b-2ab')n\}c,$$
$$2a_{31} = -bc((bm - b'l)\lambda + bn),\; 2a_{12} = -bc^2l\lambda,\; 2a_{14} = b^2c^2\lambda,$$
$$2a_{24} = -bc^2(a\lambda + a')\lambda,\; 2a_{34} = bc(ab'\lambda + a'b' - a''b)\lambda.$$

3. Allgemeine Beschaffenheit des Sehnenkegels. Der Sehnenkegel irgend eines (reellen) Punktes λ enthält nach seiner Entstehung in **1** die ganze Raumkurve. *Er ist stets ein reeller eigentlicher Kegel 2 O.*, da er die von λ nach den übrigen reellen Punkten hinlaufenden reellen Sehnen enthält, und die Raumkurve 3. O. nach § **4**, **3**, I nicht in einem Ebenenpaar enthalten sein kann (s. § 31, **4**).

Da der Punkt λ, von dem der Sehnenkegel ausgeht, seine Spitze ist, so hat er im allgemeinen *eine endliche Spitze.* Er wird nur dann ein *Zylinder*, wenn der Punkt λ einer der unendlich fernen Punkte der Raumkurve ist.

4. Die Sehnenzylinder. Ein reeller eigentlicher Zylinder 2. O. ist elliptisch oder hyperbolisch oder parabolisch, je nachdem er die unendlich ferne Ebene in einem imaginären oder reellen Geradenpaar oder einer Doppelgeraden schneidet (II § 99, (31)). Dieses Geradenpaar entsteht aber bei dem Sehnenzylinder λ, indem der unendlich ferne Punkt λ mit den andern unendlich fernen Punkten der Kurve verbunden wird. Daher ergibt sich aus § 6, (19) sofort, was für Sehnenzylinder bei den vier Arten der Raumkurve vorhanden sind.

I. *Die kub. Ellipse hat nur einen, und zwar einen elliptischen Sehnenzylinder.*

Seine Spitze und zugleich der Doppelpunkt seines unendlich fernen imaginären Geradenpaares ist der Punkt $\lambda = \infty$ (E_1 in Fig. 11, S. 11).

II. *Die kub. Hyperbel hat drei hyperbolische Sehnenzylinder.*

Ihre Spitzen sind die drei Punkte $\lambda = \infty, e, -e$ (E_1, E_2, E_3 in Fig. 12), ihre unendlich fernen reellen Geradenpaare bestehen aus je zwei Seiten des Dreiecks der drei Punkte.

III. *Die kub. hyperbol. Parabel hat einen hyperbolischen und einen parabolischen Sehnenzylinder.*

Der hyperbolische hat als Spitze den doppelt zählenden unendlich fernen Punkt $\lambda = \infty$ ($E_1 = E_2$ in Fig. 13) und als unendlich fernes Geradenpaar die Tangente im Punkt $\lambda = \infty$ und dessen Verbindungslinie mit dem einfach zählenden unendlich fernen Punkte

$\lambda = e$ (E_3 in Fig. 13). Der parabolische hat als Spitze den Punkt $\lambda = e$ und als unendlich ferne Doppelgerade dessen Verbindungslinie mit dem Punkte $\lambda = \infty$.

IV. *Die kub. Parabel hat nur einen, und zwar parabolischen Sehnenzylinder.*

Seine Spitze ist der dreifach zählende unendlich ferne Punkt $\lambda = \infty$ ($E_1 = E_2 = E_3$ in Fig. 15) und seine unendlich ferne Doppellinie die Tangente im Punkte $\lambda = \infty$.

5. Der Sehnenzylinder $\lambda = \infty$. Die Sehnenkegel (2) der Punkte $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, mit den Gleichungen:

(7) $h = 0: ac^2y^2 + (a'b - 2ab')cyz + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2)z^2 - b^2czx = 0,$

(8) $f = 0: c^2ly^2 + (bm - 2b'l)cyz + (b^2n - bb'm + b'^2l)z^2 - bc^2yt + bb'czt = 0,$

sind der Kegel und Zylinder, als deren Durchschnitt die Raumkurve § 7, (1) schon in § 6, (16); (17) erhalten wurde (die Bedeutung der Fläche $g = 0$ vgl. (37)).

Der *Zylinder* (8) ist in der Tat, wie zu § 6, (4); (6) bei § 6, (10) bemerkt, für den Fall I von § 6, (18) stets *elliptisch*, für die Fälle II und III *hyberbolisch*, für den Fall IV *parabolisch*.

Seine *Mittelpunktsachse* ist nach § 6, (11); (7):

$$cly + (\tfrac{1}{2}bm - b'l)z - \tfrac{1}{2}bct = 0,$$
$$(\tfrac{1}{2}bm - b'l)cy + (b^2n - bb'm + b'^2l)z + \tfrac{1}{2}bb'ct = 0$$

oder auch:

(9) $\quad l(cy - b'z) + \tfrac{1}{2}b(mz - ct) = 0, \ \tfrac{1}{2}m(cy - b'z) + bnz = 0.$

6. Der elliptische Zylinder der kub. Ellipse. Aus (8) und (9) folgt nun sofort:

I. *Der elliptische Zylinder der kub. Ellipse § 6, (14); (18), I ist:*

(10) $\quad c^2y^2 - 2b'cyz + (b^2e^2 + b'^2)z^2 - bc^2yt + bb'czt = 0,$

und seine Mittelpunktsachse:

(11) $\quad y - \tfrac{1}{2}bt = 0, \ z = 0.$

7. Die hyperbolischen Zylinder der kub. Hyperbel. Durch Umkehr des Vorzeichens von e^2 in (10), sowie aus (5), (6) mit $\lambda = \varepsilon e$ ($\varepsilon = \pm 1$) geht hervor:

II. *Die drei hyperbolischen Zylinder der kub. Hyperbel § 6, (14); (18), II sind:*

(12) $\quad c^2y^2 - 2b'cyz - (b^2e^2 - b'^2)z^2 - bc^2yt + bb'czt = 0,$

$$(13)\quad a'c^2y^2+\{(b\varepsilon e+b')(a\varepsilon e-a')-(ab'\varepsilon e+a'b'-a''b)\}cyz$$
$$-(abe^2-a'b'+a''b)(b\varepsilon e+b')z^2+bc(b\varepsilon e+b')zx-bc^2xy$$
$$+b^2c^2xt-(a\varepsilon e+a')bc^2yt+(ab'\varepsilon e+a'b'-a''b)bczt=0$$

und ihre Mittelpunktsachsen (II § 94, **1**; **3**):

$$(14)\qquad y-\tfrac{1}{2}bt,\ z=0;$$

$$(15)\qquad cy-(b\varepsilon e+b')z-bct=0,$$
$$c(bx-a'y)-(abe^2-a'b'+a''b)z+abc\varepsilon et=0.$$

8. Die Zylinder der kub. hyperbolischen Parabel. Aus (8) und (9), sowie aus (5), (6) mit $\lambda=e$ ergibt sich:

III. *Der hyperbolische und parabolische Zylinder der kub. hyperbol. Parabel § 6, (14); (18), III sind:*

$$(16)\qquad cyz-(be+b')z^2-c^2yt+b'czt=0,$$

$$(17)\quad ac^2y^2-2a(be+b')cyz+a(be+b')^2z^2-b^2c^2xt$$
$$+(ae+a')bc^2yt-(ab'e+a'b'-a''b)bczt=0$$

und ihre Mittelpunktsachsen:

$$(18)\qquad y-(2be+b')t=0,\ z-ct=0;$$

$$(19)\qquad cy-(be+b')z=0,\ t=0,$$

die letztere unendlich fern.

9. Der parabolische Zylinder der kub. Parabel. Endlich folgt aus (8) und (9):

IV. *Der parabolische Zylinder der kub. Parabel § 6, (14); (18), IV ist:*

$$(20)\qquad bz^2-c^2yt+b'czt=0$$

und seine unendlich ferne Mittelpunktsachse:

$$(21)\qquad z=0,\ t=0.$$

10. Durchschnitt zweier beliebiger Sehnenkegel. Die Sehnenkegel irgend zweier Punkte λ_1 und λ_2 der Raumkurve ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) haben nach (2) die Gleichungen:

$$(22)\qquad \lambda_1^2f+\lambda_1g+h=0,\ \lambda_2^2f+\lambda_2g+h=0.$$

Jeder Punkt der Durchdringungskurve der beiden Kegel genügt beiden Gleichungen. Diese haben aber, wenn nicht gleichzeitig: $f=0$, $g=0$, $h=0$ (§ 7, 9, I) ist, zur Folge:

$$(23)\qquad f:g:h=1:-(\lambda_1+\lambda_2):\lambda_1\lambda_2.$$

Da aber nach § 7, (22) identisch:

$$(24)\qquad f y_1 + g y_2 + h y_3 = 0,\ f y_2 + g y_3 + h y_4 = 0$$

ist, so genügt jeder Punkt, für den die Proportion (23) gilt, den Gleichungen § 8, (1) der Sehne $\lambda_1 \lambda_2$. Jeder Punkt der Durchdringungskurve der Kegel (22) liegt also entweder auf der Raumkurve oder auf der Sehne $\lambda_1 \lambda_2$, oder:

Die Raumkurve 3. O. ist in Verbindung mit irgend einer ihrer Sehnen der vollständige Durchschnitt der zu den Endpunkten der Sehne gehörigen Sehnenkegel.

11. Durchschnitt der Sehnenkegel $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$. Die Darstellung (7); (8) und § 6, (16); (17) der Raumkurve 3. O. entspricht daher der *Auswahl der beiden besonderen Sehnenkegel $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$* unter allen möglichen Sehnenkegeln.

Der Sehnenkegel $\lambda = \infty$ ist *Sehnenzylinder*. Bei der kub. Ellipse und Parabel steht nach **4**, I, IV nur *ein* solcher Sehnenzylinder zur Verfügung; bei der kub. Hyperbel ist $\lambda = \infty$ einer von *drei* gleichberechtigten hyperbolischen Zylindern; bei der kub. hyperbolischen Parabel ist mit $\lambda = \infty$ der hyperbolische Zylinder neben dem parabolischen ausgewählt.

In wieweit auch der Kegel $\lambda = 0$ ein besonders ausgezeichneter Sehnenkegel ist, wird in § 11, **4** näher erörtert werden.

12. Tangenten, Schmiegungsebenen und Sehnenkegel. Die Tangente im Punkte λ der Raumkurve ist, als Verbindungslinie zweier unendlich benachbarten Punkte λ, λ' (§ 8, **5**) der Kurve, eine Erzeugende des Sehnenkegels λ in **1**. Die Schmiegungsebene im Punkte λ ist als Verbindungsebene dreier benachbarten Punkte λ, λ', λ'' (§ 7, **4**) auch Verbindungsebene zweier benachbarten Erzeugenden $\lambda\lambda'$ und $\lambda\lambda''$ des Sehnenkegels λ und daher dessen Tangentialebene längs der Tangente $\lambda\lambda'$.[1]) Es folgt also (s. d. analytischen Beweis § 26, **14**):

Die „Schmiegungsebene λ“ ist die Tangentialebene des „Sehnenkegels λ“ längs der „Tangente λ“, die auf ihm liegt.

13. Asymptoten, Asymptotenebenen und Sehnenzylinder. Die Asymptoten § 8, **12** und Asymptotenebenen § 7, **11** stehen daher zu den Sehnenzylindern **4** in folgenden Beziehungen:

I. Die *Asymptote* § 8, (35) der *kub. Ellipse* liegt auf dem *elliptischen Zylinder* (10), und die *Asymptotenebene* § 7, (25) ist dessen Tangentialebene längs der Asymptote.

---

1) R. Sturm, Geom. Verw. 1 (1908), S. 313.

II. Die *drei Asymptoten* § 8, (36); (37) der *kub. Hyperbel* liegen je auf einem der *drei hyperbolischen Zylinder* (12); (13) und die *drei Asymptotenebenen* § 7, (26) sind deren Tangentialebenen längs der Asymptoten.

III. Die *Asymptote* § 8, (38) der *kub. hyperbolischen Parabel* liegt auf dem *parabolischen Zylinder* (17) und die *zweite Asymptotenebene* § 7, (27) ist dessen Tangentialebene längs der Asymptote. Die *unendlich ferne Tangente* § 8, (33) der kub. hyperbolischen Parabel liegt auf dem *hyperbolischen Zylinder* (16) und die *erste Asymptotenebene* § 7, (27) der Kurve ist dessen Tangentialebene längs der Tangente § 8, (33), d. h. die eine *Asymptotenebene des hyperbolischen Zylinders* (16).

IV. Die *unendlich ferne Tangente* § 8, (39) der *kub. Parabel* liegt auf dem *parabolischen Zylinder* (20), der längs dieser Tangente die unendlich ferne Ebene als Tangentialebene hat.

14. Flächenbündel durch die Raumkurve 3. O. Wie die Raumkurve 3. O. auf dem Kegel (2) liegt, so liegt sie nach § 7, **9**, I auch auf jeder der ∞^2 Flächen 2. O.:

$$\varrho f + \sigma g + \tau h = 0, \tag{25}$$

wo $\varrho : \sigma : \tau$ zwei beliebige Parameterverhältnisse bedeuten. Diese Flächen bilden ein „*Bündel*".

Es kann aber auch keine andere Fläche 2. O. geben, welche die Raumkurve ganz enthält. Denn jede Fläche 2. O. kann man sich mittels der linearen Funktionen § 7, (3) in der Form dargestellt denken:

$$\begin{aligned} b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + b_{33} y_3^2 + b_{44} y_4^2 + 2 b_{23} y_2 y_3 + 2 b_{31} y_3 y_1 + 2 b_{12} y_1 y_2 \\ + 2 b_{14} y_1 y_4 + 2 b_{24} y_2 y_4 + 2 b_{34} y_3 y_4 = 0 \quad (\S\ 31,\ \mathbf{1}). \end{aligned} \tag{26}$$

Soll alsdann die Kurve auf ihr liegen, muß die durch Einsetzung der Werte § 7, (2) entstehende Gleichung:

$$\begin{aligned} b_{11}\lambda^6 + b_{22}\lambda^4 + b_{33}\lambda^2 + b_{44} + 2\, b_{23}\lambda^3 + 2 b_{31}\lambda^4 + 2 b_{12}\lambda^5 + 2 b_{14}\lambda^3 \\ + 2 b_{24}\lambda^2 + 2 b_{34}\lambda = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

identisch in λ erfüllt sein, also:

$$\begin{aligned} b_{11} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} + 2 b_{31} = 0, \quad b_{23} + b_{14} = 0, \\ b_{33} + 2 b_{24} = 0, \quad b_{34} = 0, \quad b_{44} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Damit nimmt aber die Gleichung (26) die Form an:

$$b_{22}(y_2^2 - y_1 y_3) + 2 b_{14}(y_1 y_4 - y_2 y_3) + b_{33}(y_3^2 - y_2 y_4) = 0, \tag{29}$$

die nach § 7, (22) mit ϱ, σ, τ für $-b_{33}, -2b_{14}, -b_{22}$ in (25) übergeht.

Jede durch die Raumkurve gehende Fläche 2. O. muß dem Bündel (25) *angehören.*

Mit Rücksicht auf (3) hat die Gleichung (25) in den rechtwinkligen Koordinaten die Form (5) mit folgenden Werten der Koeffizienten:

$$(30)\begin{cases} a_{22} = c^2(al\varrho + a'l\sigma + an\tau), \quad a_{33} = a(b^2n - bb'm + b'^2l)\varrho \\ \quad + (abb'n - (a'b' - a''b)(bm - b'l))\sigma + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2)n\tau, \\ 2a_{23} = c\{a(bm - 2b'l)\varrho - ((an - a'm)b + (2a'b' - a''b)l)\sigma + (a'b - 2ab')n\tau\}, \\ 2a_{31} = -bc((bm - b'l)\sigma + bn\tau), \quad 2a_{12} = -bc^2l\sigma, \quad 2a_{14} = b^2c^2\sigma, \\ 2a_{24} = -bc^2(a\varrho + a'\sigma), \quad 2a_{34} = bc(ab'\varrho + (a'b' - a''b)\sigma). \end{cases}$$

15. Art der einzelnen Flächen des Bündels. Die Art der Fläche 2. O. (25) oder (5), (30) hängt wesentlich von der Determinante der Fläche ab. Die Determinante der Fläche (25) hat, insofern man nach § 7, (22) y_1, y_2, y_3, y_4 als Variable ansieht, wie wir aus § 31, (7) vorwegnehmen, den Wert: $(\varrho\tau - \sigma^2)^2$. Da nun die Determinante der Substitution § 7, (3), durch die (25) in (5), (30) übergeht, den Wert $a^3b^3c^3n^3$ hat, so ist *die Determinante der Fläche* (5), (30), insofern man x, y, z, t als Variable ansieht (II § 138, (17)):

$$(31) \qquad A = S^2(\varrho\tau - \sigma^2)^2, \quad S = a^3b^3c^3n^3.$$

Reelle Flächen 2. O. (5) mit positiver Determinante A sind aber (II § 99, (31)) notwendig einschalige Hyperboloide oder hyperbolische Paraboloide. A ist aber positiv, so oft:

$$(32) \qquad \varrho\tau - \sigma^2 \neq 0.$$

Ist dagegen:

$$(33) \qquad \varrho\tau - \sigma^2 = 0,$$

so kann man:

$$(34) \qquad \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{\sigma}{\tau} = \lambda \text{ oder } \varrho = \lambda^2, \ \sigma = \lambda, \ \tau = 1$$

setzen, worauf die Fläche (25) wieder in den Sehnenkegel (2) des Punktes λ übergeht. Also:

Eine durch die Raumkurve 3. O. gehende Fläche 2. O. ist entweder ein Sehnenkegel oder ein einschaliges Hyperboloid oder hyperbolisches Paraboloid.

16. Bedeutung der Fläche $g = 0$. Setzt man in den Gleichungen der Sehne $\lambda_1\lambda_2$ im § 8, (2): $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$, so erhält man für die Sehne $\lambda, -\lambda$:

$$(35) \qquad \begin{cases} \{bcx - a'cy + (a'b' - a''b)z\} - \lambda^2abz = 0, \\ n(cy - b'z) + \lambda^2\{lcy + (bm - b'l)z - bct\} = 0, \end{cases}$$

und durch Elimination von λ^2:

$$(36)\quad \{bcx - a'cy + (a'b' - a''b)z\}\{lcy + (bm - b'l)z - bct\} + abnz(cy - b'z) = 0$$

oder nach (3):

$$(37)\quad g = 0.$$

Die Fläche (37) ist der Ort aller Sehnen, die zwei Punkte der Kurve mit entgegengesetzten Parametern λ und $-\lambda$ verbinden.

Die unendlich ferne Kurve der Fläche (36) zerfällt, wenn $m = 0$, in das Geradenpaar:

$$(38)\quad \{(b(cx - a''z) - a'(cy - b'z))l + abnz\}(cy - b'z) = 0, \quad t = 0$$

und, wenn $l = 0$, in das Geradenpaar:

$$(39)\quad \{(b(cx - a''z) - a'(cy - b'z))m + an(cy - b'z)\}z = 0, \quad t = 0.$$

Die Fläche (37) ist daher in allen Fällen § 6, (18) ein *hyperbolisches Paraboloid.*

Da die zweite Gleichung (35) mit $m = 0$ die Form:

$$(n + l\lambda^2)(cy - b'z) - \lambda^2 bct = 0$$

erhält, so sind die Sehnen $\lambda, -\lambda$ in den Fällen $m = 0$ alle parallel der Ebene:

$$(40)\quad cy - b'z = 0.$$

17. Alle Bündelflächen gleichseitig. Die Fläche (5) ist *gleichseitig* (II § 100, (13)), wenn:

$$(41)\quad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0.$$

Soll diese Bedingung mit den Koeffizienten (30) identisch in ϱ, σ, τ bestehen, muß sein:

$$(42)\quad l(b'^2 + c^2) - bb'm + b^2 n = 0,$$

$$(43)\quad (a'(b'^2 + c^2) - a''bb')l - (a'b' - a''b)bm + abb'n = 0,$$

$$(44)\quad a(b'^2 + c^2) - (a'b' - a''b)b = 0.$$

Die Bedingung (42) ist mit $l = 1$, $m = 0$, $n = e^2$ und $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$ nicht erfüllbar nach § 6, (15). Für $l = 0$, $m = 1$, $n = -e$ führen die Gleichungen (42)—(44) auf: $be + b' = 0$, $ae^2 + a'e + a'' = 0$, $ac^2 = 0$, was ebenfalls mit § 6, (15) nicht verträglich. Es bleibt also nur der Fall der kub. Hyperbel mit $l = 1$, $m = 0$, $n = -e^2$ in § 6, (18), II. Dann wird aus (42)—(44):

$$(45)\ b'^2 + c^2 = b^2 e^2; \quad (46)\ be^2 a' - b'(ae^2 + a'') = 0,\ b'a' - b(ae^2 + a'') = 0.$$

Da aber die Gleichungen (46) linear und homogen in a', $-(ae^2 + a'')$ sind, während ihre Determinante nach (45) $b^2 e^2 - b'^2 = c^2 \neq 0$ ist, so folgt:

Bei der kub. Hyperbel § 6, (14); (18), II *sind alle durch sie hindurchgehenden Flächen* (5), (30) *gleichseitig, wenn:*

$$(47) \qquad ae^2 + a'' = 0, \quad a' = 0, \quad b^2e^2 = b'^2 + c^2.$$

Insbesondere sind *alle Sehnenkegel* und *die drei hyperbolischen Zylinder* (12) und (13) *gleichseitig.* Die Kurve heißt dann *gleichseitige kub. Hyperbel* (s. § 16, 7).

§ 10. Die Achsenkegelschnitte.

1. Begriff des Achsenkegelschnittes. Eliminiert man λ_2 aus den Gleichungen einer Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ in § 8, (3), so erhält man, mit λ statt λ_1, für den Ort aller in der Schmiegungsebene λ liegenden Achsen:

$$(1) \qquad (3\lambda v_1 + v_2)(\lambda v_3 + 3v_4) - (\lambda v_2 + v_3)^2 = 0$$

oder, mit den Abkürzungen § 7, (24):

$$(2) \qquad \lambda^2 F + \lambda G + H = 0.$$

Der Ort ist nach seiner Entstehung eine ebene Kurve und nach seiner Gleichung von der 2. Klasse:

Die Achsen, in denen eine feste Schmiegungsebene λ von allen übrigen Schmiegungsebenen geschnitten wird, umhüllen eine Kurve zweiter Klasse[1], *den „Achsenkegelschnitt in der Schmiegungsebene λ“* oder *„Schmiegungskegelschnitt“*[2] (dual zu § 9, **1**).

2. Gleichung des Achsenkegelschnittes in gemeinen Koordinaten. Setzt man in die drei Ausdrücke § 7, (24) die Werte § 7, (13) ein, so wird mit Umkehrung aller Vorzeichen:

$$(3) \quad \begin{cases} F = -(3aa'' - a'^2)u^2 + b^2v^2 - 3acwu - (3ab' - 2a'b)uv \\ \quad - (3am - 2a'l)us + 2blvs + l^2s^2, \\ G = a'a''u^2 + bb'v^2 + bcvw + a'cwu + (a'b' + a''b)uv \\ \quad - (9an - a'm - a''l)us + (bm + b'l)vs + clws + lms^2, \\ H = a''^2u^2 + b'^2v^2 + c^2w^2 + 2b'cvw + 2a''cwu + 2a''b'uv \\ \quad - (3a'n - 2a''m)us - (3bn - 2b'm)vs + 2cmws - (3ln - m^2)s^2. \end{cases}$$

Denkt man sich wiederum diese Werte in (2) eingesetzt, so hat man *die Gleichung des Achsenkegelschnittes in der Schmiegungsebene λ der Raumkurve* § 7, (1) *in Ebenenkoordinaten des rechtwinkligen Systems Oxyz.*

---

1) Möbius, Werke 1, S. 122 (1827).
2) H. Schröter, Math. Ann. 25 (1884), S. 293.

Man erhält sie auch aus den Gleichungen § 8, (4) durch Elimination von λ_2 und mit λ für λ_1 in der Form:

$$(4)\quad (3a\lambda u + (a'u + bv + ls))((a''u + b'v + cw + ms)\lambda + 3ns) - ((a'u + bv + ls)\lambda + (a''u + b'v + cw + ms))^2 = 0.$$

Nach den Koordinaten geordnet, nimmt sie die Form an:

$$(5)\quad b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv + 2b_{14}us + 2b_{24}vs + 2b_{34}ws + b_{44}s^2 = 0,$$

wo die Koeffizienten nach (2) und (3) die Werte haben:

$$(6)\quad b_{11} = -(3aa'' - a'^2)\lambda^2 + a'a''\lambda + a''^2,\quad b_{22} = b^2\lambda^2 + bb'\lambda + b'^2,\quad b_{33} = c^2,$$
$$2b_{23} = (b\lambda + 2b')c,\quad 2b_{31} = (-3a\lambda^2 + a'\lambda + 2a'')c,$$
$$2b_{12} = -(3ab' - 2a'b)\lambda^2 + (a'b' + a''b)\lambda + 2a''b',$$
$$2b_{14} = -(3am - 2a'l)\lambda^2 - (9an - a'm - a''l)\lambda - (3a'n - 2a''m),$$
$$2b_{24} = 2bl\lambda^2 + (bm + b'l)\lambda - (3bn - 2b'm),$$
$$2b_{34} = c(l\lambda + 2m),\quad b_{44} = l^2\lambda^2 + lm\lambda - (3ln - m^2).$$

3. Endliche und unendlich ferne Achsenkegelschnitte. Dual entsprechend dem Sehnenkegel § 9, **3** ist der Achsenkegelschnitt *stets ein reeller eigentlicher Kegelschnitt* (§ 31, **4**), also, so oft er einer *endlichen* Schmiegungsebene λ angehört, eine *Ellipse*, *Hyperbel* oder *Parabel*.

Die unendlich ferne Ebene kommt als Schmiegungsebene nach § 7, **10** nur bei der kub. Parabel vor, entsprechend dem Parameter $\lambda = \infty$. Da zugleich nach § 6, (18), IV $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$ wird, so folgt aus (4):

Der in der unendlich fernen Ebene liegende Achsenkegelschnitt $\lambda = \infty$ der kub. Parabel hat die Gleichung:

$$(7)\quad 3au(a''u + b'v + cw) - (a'u + bv)^2 = 0.$$

4. Parabeln als Achsenkegelschnitte. Der in einer *endlichen* Schmiegungsebene λ liegende Kegelschnitt (5) ist (II § 104, (2)) eine Parabel, wenn er mit:

$$(8)\quad b_{44} = l^2\lambda^2 + lm\lambda - (3ln - m^2) = 0$$

die unendlich ferne Ebene als Tangentialebene hat. Dieselbe quadratische Gleichung (8) bestimmte aber § 8, (27) die beiden durch die unendlich ferne Achse gehenden Schmiegungsebenen λ. Es folgt daher aus § 8, **11**:

I. Unter den Achsenkegelschnitten der *kub. Ellipse* befinden sich *zwei Parabeln*, die in den beiden parallelen Schmiegungsebenen:

(9) $$\lambda = \pm e\sqrt{3}$$

liegen.

II. Die kub. *Hyperbel* hat unter ihren Achsenkegelschnitten *keine Parabeln.*

III. Bei der kub. *hyperb. Parabel* ist nur *ein* Achsenkegelschnitt eine *Parabel*, der in der Schmiegungsebene $\lambda = \infty$ des doppelt zählenden unendlich fernen Kurvenpunktes, der einen der beiden Asymptotenebenen liegt.

IV. Bei der kub. *Parabel* sind *alle* Achsenkegelschnitte, außer (7), *Parabeln.*

5. Unterscheidung der Ellipsen und Hyperbeln. Wenn im Gegensatz zu (8):

(10) $$b_{44} \neq 0,$$

so ist der Kegelschnitt (5) ein Mittelpunktskegelschnitt (II § 104, **5**), also nach **3** eine Ellipse oder Hyperbel.

Die Determinante

(11) $$B = |b_{kl}|$$

der Fläche 2. Kl. (5) hat, da diese ein Kegelschnitt ist, den Wert 0. Bei verschwindender Determinante B haben aber die Hauptunterdeterminanten 3. Grades B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{44}, soweit sie nicht verschwinden, dasselbe Vorzeichen (II § 79, (9)); dasselbe Vorzeichen hat dann auch die Summe (II § 102, (19)):

(12) $$\mathsf{B}_0' = B_{11} + B_{22} + B_{33}.$$

Nun berechnet sich aus (6):

(13) $$B_{11} = -\left(\tfrac{3}{2} bcn\right)^2,$$

so daß (§ 6, (15)) stets:

(14) $$\mathsf{B}_0' < 0.$$

Der Kegelschnitt (5) ist aber (II § 104 (21)) eine *Ellipse oder Hyperbel, je nachdem*:

(15) $$\mathsf{B}_0' b_{44} > 0 \quad \text{oder} \quad < 0,$$

also nach (14):

(16) $$b_{44} < 0 \quad \textit{oder} \quad b_{44} > 0.$$

Für die drei ersten Arten § 6, (18) ist der Koeffizient b_{44} in (6):

(17) $$\text{I. } b_{44} = \lambda^2 - 3e^2; \quad \text{II. } b_{44} = \lambda^2 + 3e^2, \quad \text{III. } b_{44} = 1.$$

I. *Bei der kub. Ellipse ist der Achsenkegelschnitt λ eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem:*

$$(18) \qquad \lambda^2 < 3e^2 \quad \textit{oder} \quad \lambda^2 > 3e^2.$$

Den Übergang bilden die Parabeln in den Schmiegungsebenen (9).

II. *Bei der kub. Hyperbel sind alle Achsenkegelschnitte Hyperbeln.*

III. *Bei der kub. hyperb. Parabel sind sie, mit Ausnahme einer Parabel für $\lambda = \infty$, nur Hyperbeln.*[1])

6. Begriff des Mittelpunktskegelschnittes. Die Koordinaten des Mittelpunktes der Fläche 2. Kl. (5) sind allgemein (II § 101, (13)):

$$(19) \qquad x:y:z:t = b_{14}:b_{24}:b_{34}:b_{44}.$$

Da aber die Koeffizienten b_{14}, b_{24}, b_{34}, b_{44} in (6) vom zweiten Grade in λ sind, so folgt:

Der Ort der Mittelpunkte aller Achsenkegelschnitte ist wieder ein Kegelschnitt, der „Mittelpunktskegelschnitt" der Raumkurve 3. O.

7. Der Mittelpunktskegelschnitt der kub. Ellipse und Hyperbel. Für die kub. Ellipse ($\varepsilon = 1$) und Hyperbel ($\varepsilon = -1$) lautet die Parameterdarstellung des Mittelpunktskegelschnittes nach (19); (6) und § 6, (18):

$$(20) \begin{cases} x = 2a'\lambda^2 - (9a\varepsilon e^2 - a'')\lambda - 3a'\varepsilon e^2, \quad y = 2b\lambda^2 + b'\lambda - 3b\varepsilon e^2, \\ \qquad z = c\lambda, \quad t = 2(\lambda^2 - 3\varepsilon e^2). \end{cases}$$

Seine zwei Schnittpunkte mit der Ebene:

$$(21) \qquad ux + vy + wz + st = 0$$

bestimmen sich aus der quadratischen Gleichung:

$$(22) \begin{cases} 2(a'u + bv + s)\lambda^2 + (-(9a\varepsilon e^2 - a'')u + b'v + cw)\lambda \\ \qquad - 3\varepsilon e^2(a'u + bv + 2s) = 0. \end{cases}$$

Sollen die Koeffizienten dieser Gleichung alle verschwinden:

$$(23) \begin{cases} a'u + bv + s = 0, \quad -(9a\varepsilon e^2 - a'')u + b'v + cw = 0, \\ \qquad a'u + bv + 2s = 0, \end{cases}$$

müssen u, v, w, s bis auf einen Faktor die Werte haben:

$$(24) \qquad u = bc, \quad v = -a'c, \quad w = (9a\varepsilon e^2 - a'')b + a'b', \quad s = 0.$$

I. *Der Mittelpunktskegelschnitt* (20) *liegt in der Ebene:*

$$(25) \qquad c(bx - a'y) + (9ab\varepsilon e^2 + a'b' - a''b)z = 0.$$

---

1) Cremona, Ann. di mat. 2 (1869), S. 202 ff.

In jeder andern Ebene hat er *nur zwei* Punkte, ist also ein *eigentlicher* Kegelschnitt. In der unendlich fernen Ebene $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $s = 1$ hat er nach (22) die getrennten Punkte:

$$\lambda^2 - 3\varepsilon e^2 = 0. \tag{26}$$

II. *Daher ist der Mittelpunktskegelschnitt bei der kub. Ellipse* ($\varepsilon = 1$) *eine Hyperbel und bei der kub. Hyperbel* ($\varepsilon = -1$) *eine Ellipse.*

III. *Bei der kub. Ellipse ist die Ebene* (25) *der Mittelpunktshyperbel* (20) *den beiden parallelen Schmiegungsebenen* § 8, (32) *parallel.*

Die Mittelpunkte der elliptischen Achsenkegelschnitte (18) liegen auf dem einen, der hyperbolischen auf dem andern Zweig der Hyperbel (20)[1].

8. Der Mittelpunktskegelschnitt der kub. hyperb. Parabel. Mit den Werten § 6, (18), III nehmen die Gleichungen (19) nach (6) die Form an:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-3a\lambda^2 + (9ae + a')\lambda + (3a'e + 2a'')), \\ y = \frac{1}{2}(b\lambda + (3be + 2b')), \quad z = c, \quad t = 1. \end{cases} \tag{27}$$

Für die Schnittpunkte mit der Ebene (21) ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$\begin{cases} \qquad -3au\lambda^2 + ((9ae + a')u + bv)\lambda \\ + ((3a'e + 2a'')u + (3be + 2b')v + 2cw + 2s) = 0, \end{cases} \tag{28}$$

die für die Ebene $u, v, w, s = 0, 0, 0, 1$ die Doppelwurzel $\lambda = \infty$ hat und nur für eine Ebene $u = 0$, $v = 0$, $w = 1$, $s = -c$ identisch wird.

Der Mittelpunktskegelschnitt bei der kub. hyperb. Parabel ist eine Parabel in der Ebene:

$$z - ct = 0, \tag{29}$$

der einen Asymptotenebene § 7, (27).

Bei der kub. *Parabel* zieht sich der Mittelpunktskegelschnitt (19) nach (6) mit $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$ auf die unendlich ferne *Gerade*:

$$z = 0, \quad t = 0 \tag{30}$$

zusammen, die Tangente § 8, (39)[2].

9. Schnittpunkte der Ebene des Mittelpunktskegelschnittes mit der Raumkurve. Für die drei Schnittpunkte der Ebene (25) mit der Raumkurve ergibt sich durch Einsetzen der Werte § 7, (1) in (25) die kubische Gleichung:

$$\lambda(\lambda^2 + 9\varepsilon e^2) = 0. \tag{31}$$

1) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 203ff.; J. f. Math. 58 (1861), S. 146.
2) Schröter, Oberfl. 2. O. (1880), S. 322.

Die Ebene des Mittelpunktskegelschnittes schneidet die kub. Ellipse ($\varepsilon = 1$) *in einem reellen Punkte* $\lambda = 0$, *die kub. Hyperbel* ($\varepsilon = -1$) *in drei reellen Punkten:*

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \pm 3e. \tag{32}$$

Die Ebene (29) schneidet als Schmiegungsebene dreifach im Punkte $\lambda = \infty$.

10. Der Mittelpunktskegelschnitt ein Kreis. Die unendlich fernen Punkte des Kegelschnittes (20) haben neben $t = 0$ die Koordinaten:

$$x = 3a'\varepsilon e^2 - (9a\varepsilon e^2 - a'')\lambda, \quad y = 3b\varepsilon e^2 + b'\lambda, \quad z = c\lambda; \quad \lambda^2 = 3\varepsilon e^2. \tag{33}$$

Für $\varepsilon = -1$ sind sie imaginär und ist:

$$x^2 + y^2 + z^2 = -3e^2\{(9ae^2 + a'')^2 + b'^2 + c^2 - 3(a'^2 + b^2)e^2 \\ \pm 2((9ae^2 + a'')a' + bb')\sqrt{3}ei\}. \tag{34}$$

Sie liegen beide auf dem imaginären Kugelkreise:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \tag{35}$$

wenn der Ausdruck (34) verschwindet, oder:

Der Mittelpunktskegelschnitt der kub. Hyperbel § 6, (14); (18), II *ist ein Kreis, wenn:*

$$(9ae^2 + a'')^2 + b'^2 + c^2 - 3(a'^2 + b^2)e^2 = 0, \quad (9ae^2 + a'')a' + bb' = 0. \tag{36}$$

11. Der Mittelpunktskegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel. Für $\varepsilon = 1$ sind die Punkte (33) reell und haben, den beiden Werten von λ entsprechend die Koordinaten:

$$x = 3a'e^2 \mp (9ae^2 - a'')e\sqrt{3}, \quad y = 3be^2 \pm b'e\sqrt{3}, \quad z = \pm ce\sqrt{3}. \tag{37}$$

Sie sind harmonische Pole des imaginären Kugelkreises (35), wenn

$$9a'^2e^4 - 3(9ae^2 - a'')^2e^2 + 9b^2e^4 - 3b'^2e^2 - 3c^2e^2 = 0,$$

oder:

Der Mittelpunktskegelschnitt der kub. Ellipse § 6, (14); (18), I *ist eine gleichseitige Hyperbel, wenn:*

$$(9ae^2 - a'')^2 + b'^2 + c^2 - 3(a'^2 + b^2)e^2 = 0 \tag{38}$$

12. Kub. Hyperbel mit lauter gleichseitigen Achsenhyperbeln. Bei der kub. Hyperbel sind nach 5, II alle Achsenkegelschnitte (5) Hyperbeln. Dabei haben die Unterdeterminanten:

$$\beta_{44} = b_{11}b_{44} - b_{14}^2, \quad \beta_{55} = b_{22}b_{44} - b_{24}^2, \quad \beta_{66} = b_{33}b_{44} - b_{34}^2 \tag{39}$$

mit $l = 1$, $m = 0$, $n = -e^2$ nach (6) die Werte:

$$(40)\quad\begin{cases}-\frac{4}{3}\beta_{44}=4aa''\lambda^4+12aa'e^2\lambda^3+(27a^2e^4+18aa''e^2-a''^2)\lambda^2\\ \qquad\qquad +2(9ae^2-a'')a'e^2\lambda+(3a'^2e^2-4a''^2)e^2,\\ -\frac{4}{3}\beta_{55}=-b'^2\lambda^2-2bb'e^2\lambda+(3b^2e^2-4b'^2)e^2,\\ -\frac{4}{3}\beta_{66}=-c^2\lambda^2-4c^2e^2.\end{cases}$$

Die Hyperbel (5) ist aber gleichseitig (II § 104, (20)), wenn:

$$(41)\qquad B_0=\beta_{44}+\beta_{55}+\beta_{66}=0.$$

Soll diese Bedingung für alle Werte λ erfüllt sein, müssen nach (40) die Gleichungen bestehen:

$$aa''=0,\quad aa'e^2=0,\quad 27a^2e^4+18aa''e^2-a''^2-b'^2-c^2=0,$$
$$(9ae^2-a'')a'-bb'=0,\quad 3a'^2e^2-4a''^2+3b^2e^2-4b'^2-4c^2=0,$$

oder da $abce \neq 0$:

$$a'=0,\quad a''=0,\quad b'=0,\quad 27a^2e^4-c^2=0,\quad 3b^2e^2-4c^2=0:$$

Für die kub. Hyperbel § 6, (14); (18), II *sind alle Achsenkegelschnitte gleichseitige Hyperbeln, wenn:*

$$(42)\qquad a'=0,\quad a''=0,\quad b'=0,\quad b^2=36a^2e^2,\quad c^2=27a^2e^4.$$

Da hiermit die Bedingungen (36) erfüllt sind, so folgt:

Bei der Hyperbel (42) *ist der Mittelpunktskegelschnitt ein Kreis.*

13. Flächenscharschar der Schmiegungsebenen. Dual zu § 9, 14 folgt im Anschluß an (2):

Jede Fläche 2. Klasse der Scharschar:

$$(43)\qquad \varrho F+\sigma G+\tau H=0$$

enthält alle Schmiegungsebenen der Raumkurve 3. O. als Tangentialebenen und es gibt auch keine anderen solchen Flächen.

Die Gleichung (43) hat die Form (5) mit folgenden Werten der Koeffizienten:

$$(44)\quad\begin{cases}b_{11}=-(3aa''-a'^2)\varrho+a'a''\sigma+a''^2\tau,\quad b_{22}=b^2\varrho+bb'\sigma+b'^2\tau,\\ b_{33}=c^2\tau,\quad 2b_{23}=(b\sigma+2b'\tau)c,\\ 2b_{31}=(-3a\varrho+a'\sigma+2a''\tau)c,\\ 2b_{12}=-(3ab'-2a'b)\varrho+(a'b'+a''b)\sigma+2a''b'\tau,\\ 2b_{14}=-(3am-2a'l)\varrho-(9an-a'm-a''l)\sigma-(3a'n-2a''m)\tau,\\ 2b_{24}=2bl\varrho+(bm+b'l)\sigma-(3bn-2b'm)\tau,\\ 2b_{34}=c(l\sigma+2m\tau),\quad b_{44}=l^2\varrho+lm\sigma-(3ln-m^2)\tau.\end{cases}$$

Unter der Bedingung § 9, (33) geht die Fläche (43) wieder in den *Achsenkegelschnitt* in der Schmiegungsebene mit dem Parameter λ in § 9, (34) über. Andernfalls ist sie eine *eigentliche Linienfläche* 2. Kl. (§ 31, **3**), bei der *kub. Parabel* ($l=0$, $m=0:b_{44}=0$) insbesondere stets ein *hyperbolischer Paraboloid.*

14. Bedeutung der Fläche $G=0$. Setzt man in den Gleichungen der Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ in § 8, (4): $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=-\lambda$, so erhält man für die Achse $\lambda \times -\lambda$:

$$(45)\qquad \begin{cases} \lambda^2(a'u+bv+ls)-3ns=0, \\ -3au\lambda^2+(a''u+b'v+cw+ms)=0; \end{cases}$$

und durch Elimination von λ^2:

$$(46)\qquad (a'u+bv+ls)(a''u+b'v+cw+ms)-9anus=0$$

oder nach (3):

$$(47)\qquad G=0.$$

Alle Ebenen, die büschelweise durch eine Achse $\lambda \times -\lambda$ gehen sind also Tangentialebenen der Fläche (47), die Achsen selbst folglich Erzeugende, oder:

Die Fläche 2. *Kl. (47) ist der Ort aller der Achsen, in denen sich zwei Schmiegungsebenen von entgegengesetzten Parametern λ und $-\lambda$ schneiden.*

Sie ist, da der Koeffizient lm von s^2 nach (3) für alle Fälle § 6, (18) verschwindet, immer ein *hyperbolisches Paraboloid.*

§ 11. Scheitelpunkte, Scheitelelemente, Scheitel- und Achsendurchmesser.

1. Begriff des Scheitelpunktes. Eine Asymptote der Raumkurve 3. O. ist nach § 9, **13** Erzeugende eines durch die Kurve gehenden Zylinders. Die durch diese Erzeugende bestimmte Diametralebene des Zylinders schneidet, wie jede Ebene, die Kurve in drei Punkten. Von ihnen fallen zwei in den Berührungspunkt der Asymptote und der dritte, da in derselben Geraden nach § 4, **3**, II nicht mehr als zwei Kurvenpunkte liegen können, in die diametral gegenüberliegende Erzeugende des Zylinders. Diesen dritten *der Asymptote diametral gegenüberliegenden Punkt der Kurve* nennen wir, wenn er im Endlichen liegt, *einen Scheitelpunkt.*

Eine Asymptote (§ 8, **12**) soll bei dieser Erklärung auch durch eine *unendlich ferne Tangente* vertretbar sein.

2. Die Scheitelpunkte der kub. Ellipse und Hyperbel. Die *Asymptote* $\lambda = \infty$ der kub. Ellipse und Hyperbel hat nach § 8, (35); (36) die Gleichungen:

$$(1) \qquad y - bt = 0, \quad z = 0,$$

und die *Mittelpunktsachse* des Zylinders $\lambda = \infty$ nach § 9, (11); (14) die Gleichungen:

$$(2) \qquad y - \tfrac{1}{2}bt = 0, \quad z = 0.$$

Die beide Geraden verbindende Diametralebene $z = 0$ des Zylinders schneidet die Kurve § 6, (14) in den Punkten $\lambda = \infty, \infty, 0$. Der letztere ist also ein Scheitelpunkt.

Die *Asymptote* $\lambda = \varepsilon e\,(\varepsilon = \pm 1)$ der kub. Hyperbel hat nach § 8,(37) die Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} bcx - (2a\varepsilon e + a')cy + (abe^2 + 2ab'\varepsilon e + a'b' - a''b)z = 0, \\ \qquad\qquad 2cy - 2(b\varepsilon e + b')z - bct = 0, \end{cases}$$

und die *Mittelpunktsachse* des hyperbol. Zylinders $\lambda = \varepsilon e$ nach § 9, (15) die Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{cases} bcx - a'cy - (abe^2 - a'b' + a''b)z + abc\varepsilon et = 0, \\ \qquad cy - (b\varepsilon e + b')z - bct = 0. \end{cases}$$

Addiert man die mit $3a\varepsilon e$ multiplizierte zweite Gleichung (3) zur ersten (3) und die mit $4a\varepsilon e$ multiplizierte zweite Gleichung (4) zur ersten (4), so folgt beidemal dieselbe Gleichung:

$$(5) \quad bcx + (4a\varepsilon e - a')cy - (5abe^2 + 4ab'\varepsilon e - a'b' + a''b)z - 3abc\varepsilon et = 0,$$

die somit die durch die Asymptote (3) gehende Diametralebene des Zylinders darstellt. Setzt man die Werte § 6, (14); (18), II in (5) ein, so folgt für die Schnittpunkte der Diametralebene mit der Kurve:

$$(6) \qquad \lambda^3 + \varepsilon e\lambda^2 - 5e^2\lambda + 3\varepsilon e^3 = (\lambda - \varepsilon e)^2(\lambda + 3\varepsilon e) = 0;$$

der Punkt $\lambda = -3\varepsilon e$ ist daher Scheitelpunkt.

I. *Die kub. Ellipse hat einen Scheitelpunkt* $\lambda = 0$, *der auf dem elliptischen Zylinder der Asymptote* $\lambda = \infty$ *diametral gegenüberliegt.*

II. *Die kub. Hyperbel hat drei Scheitelpunkte:*

$$(7) \qquad \lambda = 0, \quad \lambda = -3e, \quad \lambda = 3e,$$

die auf den drei hyperbolischen Zylindern bezüglich den Asymptoten:

$$(8) \qquad \lambda = \infty, \quad \lambda = e, \quad \lambda = -e$$

diametral gegenüberliegen.

III. *Die Scheitelpunkte liegen* nach § 10, 9 *in der Ebene des Mittelpunktskegelschnittes.*[1])

---

1) Cremona, J. f. Math. 58 (1861), S. 147; Schröter, Oberfl. 2. O. (1880), S. 335.

3. Die Scheitelpunkte der kub. hyperbolischen Parabel und Parabel. Die *Asymptote* $\lambda = e$ der kub. hyperbol. Parabel § 8, (38) ist Erzeugende des parabolischen Zylinders (§ 9, **13**, III). Die durch sie gehende „Diametralebene" (II § 14, 8) des parabolischen Zylinders schneidet diesen in seiner unendlich fernen Geraden. Es liegt also auch kein *endlicher* Punkt der Raumkurve der Asymptote diametral gegenüber. Die *unendlich ferne Tangente* $\lambda = \infty$ ist (§ 9, **13**, III) Erzeugende des hyperbolischen Zylinders, in dessen Asymptotenebene gelegen, so daß ihr keine *endliche* Erzeugende diametral gegenüberliegt.

III. *Die kub. hyperb. Parabel hat keinen Scheitelpunkt.*

Die *unendlich ferne Tangente* der kub. Parabel ist (§ 9, **13**, IV) die unendlich ferne Erzeugende des parabolischen Zylinders. Alle durch sie gehenden Ebenen sind Diametralebenen des Zylinders, so daß jeder Punkt der Kurve mit ihr durch eine Diametralebene verbunden werden kann.

IV. *Die kub. Parabel hat unendlich viele Scheitelpunkte; jeder endliche Punkt der Kurve ist ein solcher.*

4. Der Scheitelpunkt als Koordinatenanfangspunkt. Das rechtwinklige System $Oxyz$, auf das die Gleichungen § 6, (14) bezogen sind, hat den Punkt $\lambda = 0$ der Raumkurve als Anfangspunkt O.

Bei der kub. Ellipse ist dieser nach **2**, I der einzige Scheitelpunkt, bei der kub. Hyperbel nach **2**, II einer der drei Scheitelpunkte, bei den beiden kub. Parabeln dagegen ist er nach **3**, III; IV nicht in gleicher Weise ausgezeichnet. In der Tat ist auch in diesen Fällen, die nach § 6, (18), III; IV bei nicht homogener Schreibweise, in der Form:

$$(9) \qquad x = \frac{a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda}{m\lambda + n}, \quad y = \frac{b\lambda^2 + b'\lambda}{m\lambda + n}, \quad z = \frac{c\lambda}{m\lambda + n}$$

zusammengefaßt werden können, die Form der Gleichungen für den gewählten Anfangspunkt nicht charakteristisch.

5. Parallelverschiebung des Koordinatensystems. Führt man nämlich durch die Substitution:

$$(10) \qquad X = x - x_0, \quad Y = y - y_0, \quad Z = z - z_0$$

ein paralleles System ein, dessen Anfangspunkt x_0, y_0, z_0 irgendein Punkt λ_0 der Kurve sei, so wird:

$$X = \frac{a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda}{m\lambda + n} - \frac{a\lambda_0^3 + a'\lambda_0^2 + a''\lambda_0}{m\lambda_0 + n}, \ldots, \ldots$$

oder mit den Abkürzungen:

$$\lambda = \lambda_0 + \mu, \quad n_0 = m\lambda_0 + n$$

zusammengezogen:

$$X = \frac{a n_0 \mu^3 + (3a\lambda_0 + a') n_0 \mu^2 + (2am\lambda_0^3 + (3an + a'm)\lambda_0^2 + 2a'n\lambda_0 + a''n)\mu}{n_0(m\lambda + n)}, \ldots$$

oder wieder homogen geschrieben:

(11) $X = a\mu^3 + a_0'\mu^2 + a_0''\mu,\ Y = b\mu^2 + b_0'\mu,\ Z = c_0\mu,\ T = m\mu + n_0$

wo die neuen Konstanten die Werte haben:

$$(12)\begin{cases} a_0' = 3a\lambda_0 + a',\ n_0 a_0'' = 2am\lambda_0^3 + (3an + a'm)\lambda_0^2 + 2a'n\lambda_0 + a''n, \\ n_0 b_0' = bm\lambda_0^2 + 2bn\lambda_0 + b'n,\quad n_0 c_0 = cn,\quad n_0 = m\lambda_0 + n. \end{cases}$$

Danach ergibt sich aber mit $m = 1,\ n = -e$ und $m = 0,\ n = 1$ (§ 6, (14); (18)):

III. *Die Gleichungen für die kub. hyperbol. Parabel im rechtwinkligen System $Oxyz$:*

(13) $x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda,\ y = b\lambda^2 + b'\lambda,\ z = c\lambda,\ t = \lambda - e$

behalten in jedem parallelen System O_0XYZ, dessen Anfangspunkt O_0 ein beliebiger endlicher Punkt λ_0 der Kurve ($\lambda_0 \neq e$) ist, dieselbe Form:

(14) $X = a\mu^3 + a_0'\mu^2 + a_0''\mu,\ Y = b\mu^2 + b_0'\mu,\ Z = c_0\mu,\ T = \mu - e_0,$

mit den neuen Konstanten:

$$(15)\begin{cases} a_0' = 3a\lambda_0 + a',\quad e_0 a_0'' = -2a\lambda_0^3 + (3ae - a')\lambda_0^2 + 2a'e\lambda_0 + a''e \\ e_0 b_0' = -b\lambda_0^2 + 2be\lambda_0 + b'e,\quad e_0 c_0 = ce,\quad e_0 = -\lambda_0 + e \end{cases}$$

und dem neuen Parameter:

(16) $$\mu = \lambda - \lambda_0.$$

IV. *Die Gleichungen für die kub. Parabel im rechtwinkligen System $Oxyz$:*

(17) $x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda,\quad y = b\lambda^2 + b'\lambda,\quad z = c\lambda,\quad t = 1$

behalten in jedem parallelen System O_0XYZ, dessen Anfangspunkt O_0 ein beliebiger Punkt λ_0 der Kurve ist, dieselbe Form:

(18) $X = a\mu^3 + a_0'\mu^2 + a_0''\mu,\quad Y = b\mu^2 + b_0'\mu,\quad Z = c\mu,\quad T = 1$

mit den neuen Koeffizienten:

(19) $a_0' = 3a\lambda_0 + a',\quad a_0'' = 3a\lambda_0^2 + 2a'\lambda_0 + a'',\quad b_0' = 2b\lambda_0 + b'$

und dem neuen Parameter (16).

6. Tangentialebenen von Kegel und Zylinder längs der gemeinsamen Erzeugenden. Die Raumkurve 3. O. wird nach § 6, (16); (17) als Durchschnitt des *Kegels* und *Zylinders*:

(20) $ac^2y^2 + (a'b - 2ab')cyz + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2)z^2 - b^2czx = 0,$

(21) $c^2ly^2 + (bm - 2b'l)cyz + (b'^2l - bb'm + b^2n)z^2 - bc^2yt + bb'czt = 0$

erhalten. Der Kegel hat seine Spitze in O und ist Fig. 20 durch seine Leitlinie k' in der zur Ebene Oyz parallelen Ebene $O'y'z'$ angedeutet. Der Zylinder ist Fig. 20 durch die Leitlinien h und h' bezeichnet. Beide Flächen haben als *gemeinsame Erzeugende* die x-Achse.

I. Die *Tangentialebene des Kegels* längs einer Erzeugenden $x_0 : y_0 : z_0$ hat die Gleichung:

(22) $$2ac^2y_0y + (a'b - 2ab')c(y_0z + z_0y) + 2(ab'^2 - a'bb' + a''b^2)z_0z - b^2c(z_0x + x_0z) = 0,$$

die *Tangentialebene des Zylinders* längs einer Erzeugenden $y_0 : z_0 : t_0$ ebenso:

(23) $$2c^2ly_0y + (bm - 2b'l)c(y_0z + z_0y) + 2(b'^2l - bb'm + b^2n)z_0z - bc^2(y_0t + t_0y) + bb'c(z_0t + t_0z) = 0.$$

Fig. 20.

Längs der gemeinsamen Erzeugenden $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ (OO' Fig. 20) hat daher der *Kegel* die Tangentialebene:

(24) $$z = 0 \quad (Ot_0,\ OyO'y')$$

und der *Zylinder* die Tangentialebene:

(25) $$cy - b'z = 0 \quad (Os_0).$$

Jene schneidet den Zylinder außer in der x-Achse in der Erzeugenden:

(26) $$y : z : t = b : 0 : l \quad (AA'),$$

diese den Kegel außer in der x-Achse in der Erzeugenden:

(27) $$x : y : z = a'' : b' : c \quad (OT).$$

Da diese beiden Geraden aus § 8, (9) mit $\lambda = \infty$ und $\lambda = 0$ hervorgehen, so ergibt sich:

II. *Die Tangentialebene* Ot_0 *des Kegels längs der gemeinsamen Erzeugenden schneidet den Zylinder in der Tangente* AA' *der Raumkurve im Punkte* $\lambda = \infty$, *die Tangentialebene* Os_0 *des Zylinders längs der*

gemeinsamen Erzeugenden schneidet den Kegel in der Tangente OT der Raumkurve im Punkte $\lambda = 0$[1] (Fig. 20).

7. Weitere Tangentialebenen von Kegel und Zylinder. Wiederum hat der *Kegel* längs der Erzeugenden (27), der Tangente $\lambda = 0$, nach (22) die Tangentialebene:

$$(28) \qquad c(bx - a'y) + (a'b' - a''b)z = 0 \quad (Ot_1),$$

nach § 7, (10) die Schmiegungsebene $\lambda = 0$; und der *Zylinder* längs der Erzeugenden (26), der Tangente $\lambda = 0$, die Tangentialebene:

$$(29) \qquad l(cy - b'z) + b(mz - ct) = 0 \quad (As_1),$$

nach § 7, (10) die Schmiegungsebene $\lambda = \infty$. Beides stimmt mit § 9, **12** überein, da (20) der Sehnenkegel $\lambda = 0$ und (21) der Sehnenkegel $\lambda = \infty$ ist.

Die Schnittlinie der beiden Tangentialebenen (24) und (28) des Kegels:

$$(30) \qquad x : y : z = a' : b : 0 \quad (OS \text{ Fig. } 20)$$

ist die *Polare der Tangentialebene* Os_0 *des Zylinders in bezug auf den Kegel* (II § 80, **3**).

Die Schnittlinie der beiden Tangentialebenen (25) und (29) des Zylinders:

$$(31) \qquad y : z : t = b' : c : m$$

ist die *Polare der Tangentialebene* Ot_0 *des Kegels in bezug auf den Zylinder* (in Fig. 20 ist sie unendlich fern, weil $t_0 = y'$ mit $m = 0$ ein Durchmesser der Leitkurve h' ist).

Die Geraden (26), (27), (30), (31) und Ebenen (24), (25), (28), (29) mögen kurz als *Scheitelelemente* bezeichnet werden, da sie sich, außer im Fall **3**, III, an den Scheitelpunkt $\lambda = 0$ anlehnen. Sie geben zugleich *die Bedeutung eines Teils der Konstanten* $a, a', a'', b, b', c, l, m, n$.

8. Scheiteldurchmesser. Der laufende Punkt der geraden Linie (30) ist mit einem Parameter σ:

$$(32) \qquad x = a'\sigma, \quad y = b\sigma, \quad z = 0, \quad (t = 1).$$

Soll er auf der Sehne $\lambda_1\lambda_2$ der Raunkurve liegen, müssen die Gleichungen § 8, (2) durch die Substitution (32) erfüllt werden, also die Bedingungen bestehen:

$$(33) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad (l\lambda_1\lambda_2 - n)\sigma - \lambda_1\lambda_2 = 0,$$

oder mit veränderter Bezeichnung:

---

1) Fr. Seydewitz, Arch. Math. Phys. 10 (1847), S. 206.

I. *Die Sehne* $\lambda\lambda'$ *der Raumkurve 3. O. schneidet die Gerade* (32) *unter der Bedingung:*

$$(34) \qquad \lambda + \lambda' = 0.$$

Der Parameter des Schnittpunktes ist dann:

$$(35) \qquad \sigma = \frac{\lambda\lambda'}{l\lambda\lambda' - n} = \frac{\lambda^2}{l\lambda^2 + n}.$$

Die beiden Endpunkte λ und $\lambda' = -\lambda$ der Sehne haben nach § 6, (14) die nicht homogenen Koordinaten:

$$(36) \qquad x = \frac{a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda}{l\lambda^2 + m\lambda + n}, \ldots, \ldots; \; x' = \frac{-a\lambda^3 + a'\lambda^2 - a''\lambda}{l\lambda^2 - m\lambda + n}, \ldots, \ldots$$

Ihr Mittelpunkt ist unter der Voraussetzung $m = 0$:

$$(37) \qquad \frac{x + x'}{2} = \frac{a'\lambda^2}{l\lambda^2 + n}, \quad \frac{y + y'}{2} = \frac{b\lambda^2}{b\lambda^2 + n}, \quad \frac{z + z'}{2} = 0,$$

also gerade der Punkt (32) mit dem Werte (35) von σ.

II. *Die gerade Linie* (30) *schneidet und halbiert, falls* $m = 0$ *ist, alle die Sehnen der Raumkurve* § 6, (14), *die zwei Punkte mit entgegengesetzten Parametern* λ *und* $-\lambda$ *verbinden.*

Für $m \neq 0$ hat sie diese Bedeutung nicht. Die Fälle $m = 0$ (§ 6, (18)) sind aber nach **2**, I; II und **3**, IV gerade die Fälle, wo der Kurvenpunkt $\lambda = 0$ oder O, durch den die Gerade (30) geht, ein Scheitelpunkt ist. Die *Scheiteltangente* $\lambda = 0$ gehört zu den halbierten Sehnen.

Daher nennen wir die Gerade (30) einen *Scheiteldurchmesser* der Raumkurve 3. O. Es wird sich später ergeben, daß die Anzahl der Scheiteldurchmesser der vier Arten der Raumkurve gerade den unter **2**, I; II; **3**, III; IV angegebenen Anzahlen der Scheitelpunkte entspricht (§ 35, **6**; 8), *so daß die kub. Ellipse einen, die kub. Hyperbel drei*[1]), *die kub. hyperbolische Parabel keinen, die kub. Parabel unendlich viele Scheiteldurchmesser besitzt.*

9. Achsendurchmesser. Der *Zylinder* (21) ist nach § 9, **6**; **7** für die kub. *Ellipse* elliptisch und für die kub. *Hyperbel* hyperbolisch und hat in beiden Fällen die *Mittelpunktsachse* (MM' in Fig. 20):

$$(38) \qquad y = \tfrac{1}{2}b, \quad z = 0,$$

in nicht homogener Schreibweise mit $t = 1$ in § 9, (11); (14). Die Gerade (38) schneidet die Sehne § 8, (2), wenn ($l = 1$):

$$x - \tfrac{1}{2}(a(\lambda_1 + \lambda_2) + a') = 0, \quad \tfrac{1}{2}(\lambda_1\lambda_2 - n) - \lambda_1\lambda_2 = 0$$

1) Cremona, J. f. Math. 58 (1861), S. 147; Schröter, Oberfl. S. 335.

oder mit λ, λ' für λ_1, λ_2:

(39) $\lambda\lambda' + n = 0$, (40) $x = \frac{1}{2}a(\lambda + \lambda') + \frac{1}{2}a'$.

Der Schnittpunkt ist dann der Mittelpunkt der Sehne $\lambda\lambda'$ der Raumkurve 3. O., da sie zugleich Sehne des Zylinders ist und die Mittelpunktsachse eines elliptischen oder hyperbolischen Zylinders alle sie schneidenden Sehnen des Zylinders halbiert.

Der Zylinder (21) ist nach § 9, 8 für die *kub. hyperbolische Parabel* hyperbolisch und hat nach § 9, (18) die *Mittelpunktsachse* (mit $t = 1$):

(41) $$y = 2be + b', \; z = c.$$

Sie schneidet die Sehne $\lambda\lambda'$ nach § 8, (2), wenn ($l = 0$, $m = 1$, $n = -e$):

(42) $\lambda + \lambda' = 2e$, (43) $x = 4ae^2 + 2a'e + a'' - a\lambda\lambda'$.

Die Mittelpunktsachse des elliptischen oder hyperbolischen Zylinders (21) *schneidet und halbiert alle Sehnen $\lambda\lambda'$ der Raumkurve* § 6, (14), *deren Endpunktparameter λ und λ' für die kub. Ellipse oder Hyperbel der Bedingung* (39), *für die kub. hyperbolische Parabel der Bedingung* (42) *entsprechen.*

Wir nennen daher die Mittelpunktsachse einen *Achsendurchmesser* der Raumkurve 3. O.[1]) Es wird sich später ergeben (§ 20, **13**), daß für die kub. Hyperbel auch die Mittelpunktsachsen der beiden anderen hyperbolischen Zylinder solche Durchmesser sind, *so daß die kub. Ellipse einen, die kub. Hyperbel drei, die kub. hyperbolischen Parabel einen, die kub. Parabel keinen Achsendurchmesser besitzt.*

10. Ort der von einem Scheiteldurchmesser halbierten Sehnen. Der Ort der Sehnen λ, $-\lambda$ hat sich in § 9, (36) für alle Fälle § 6, (18) ergeben. In den Fällen $m = 0$ ist nach 8, II ein Scheiteldurchmesser vorhanden. Daher ergibt sich aus § 9, (37); (3); (40):

Der Ort der vom Scheiteldurchmesser (30) *halbierten Sehnen λ, $-\lambda$, die der Ebene* (25) *parallel sind, ist das hyperbolische Paraboloid:*

(44) $$\begin{cases} g = a'c^2ly^2 - (abn + (2a'b' - a''b)l)cyz + (abn + (a'b' - a''b)l)b'z^2 \\ \quad + bb'clzx - bc^2lxy + b^2c^2xt - a'bc^2yt + (a'b' - a''b)bczt = 0. \end{cases}$$

11. Ort der von einem Achsendurchmesser halbierten Sehnen. Bei der *kub. Ellipse* und *Hyperbel* ist $l = 1$, $m = 0$. Bezeichnet man nun das laufende x des Mittelpunktes der Sehne $\lambda\lambda'$ mit σ, so daß nach (39), (40):

(45) $$\lambda\lambda' = -n, \quad \lambda + \lambda' = \frac{2\sigma - a'}{a},$$

1) Schröter, Oberfl. 2. O. (1880), S. 339.

so werden die Gleichungen der Sehne nach § 8, (2):

$$(46)\qquad \begin{cases} bcx - 2c\sigma y - (abn - 2b'\sigma + a''b)z = 0, \\ 2acy - (2ab' + 2b\sigma - a'b)z - abct = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von σ folgt als *Ort der vom Achsendurchmesser* (38) *halbierten Sehnen,* die Fläche 2. O.:

$$(47)\qquad \begin{cases} 2ac^2y^2 + \{(an + a'')b^2 + (2ab' - a'b)b'\}z^2 - (4ab' - a'b)cyz \\ \qquad - b^2czx - abc^2yt + abb'czt = 0. \end{cases}$$

Sie entspricht den Bündelparametern $\varrho = 1$, $\sigma = 0$, $n\tau = 1$ in § 9, (30).

Bei der *kub. hyperbolischen Parabel* werden die Gleichungen der Sehne $\lambda\lambda'$ mit (42):

$$(48)\qquad \begin{cases} \{bcx - (2ae + a')cy + (2ab'e + a'b' - a''b)z\} + b\lambda\lambda' \cdot az = 0, \\ e\{cy - (2be + b')z\} + b\lambda\lambda' \cdot (z - ct) = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $b\lambda\lambda'$ folgt als *Ort der vom Achsendurchmesser* (41) *halbierten Sehnen* die Fläche 2. O.:

$$(49)\qquad \begin{cases} (2abe^2 + 3ab'e + a'b' - a''b)z^2 - (3ae + a')cyz + bczx - bc^2xt \\ \qquad + (2ae + a')c^2yt - (2ab'e + a'b' - a''b)czt = 0, \end{cases}$$

entsprechend den Bündelparametern $\varrho = -2e$, $\sigma = -1$, $\tau = 0$.

§ 12. Das schiefwinklige Koordinatensystem der Scheitelelemente.

1. Einführung eines schiefwinkligen Systems. Die vom Anfangspunkt O des rechtwinkligen Koordinatensystems $Oxyz$ (Fig. 20), dem Punkte $\lambda = 0$ der Raumkurve, ausgehenden Geraden OO', OS und OT, also *erstens* die x-Achse als gemeinsame Erzeugende von Kegel und Zylinder § 11, (20); (21), *zweitens* die Polare § 11, (30) der längs der x-Achse berührenden Tangentialebene des Zylinders in bezug auf den Kegel und *drittens* die Tangente § 11, (27) der Raumkurve im Punkte O, haben die Richtungskosinus:

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1, & \beta_1 = 0, & \gamma_1 = 0; \\ \alpha_2 = \dfrac{a'}{b_0}, & \beta_2 = \dfrac{b}{b_0}, & \gamma_2 = 0; & b_0 = \sqrt{a'^2 + b^2}; \\ \alpha_3 = \dfrac{a''}{c_0}, & \beta_3 = \dfrac{b'}{c_0}, & \gamma_3 = \dfrac{c}{c_0}; & c_0 = \sqrt{a''^2 + b'^2 + c^2}. \end{cases}$$

Sie bilden also nach § 6, (15) *ein stets vorhandenes, dem Punkte O der Kurve eigentümliches schiefwinkliges Achsensystem* $O\xi\eta\zeta$.[1])

1) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 201.

Die Ebene $O\eta\zeta$ ($OST = Ot_1$ Fig. 20) ist nach § 11, (28) die Schmiegungsebene der Raumkurve im Punkte O; ihre drei Schnittpunkte mit der Kurve sind also $\lambda = 0, 0, 0$. Die Ebene $O\zeta\xi$ (Os_0 Fig. 20) ist, weil sie durch die Tangente OT und die x-Achse geht, die durch den Punkt $\lambda = \infty$ gehende Tangentialebene der Kurve im Punkte O; ihre drei Schnittpunkte sind $\lambda = 0, 0, \infty$. Die Ebene $O\xi\eta$ (Ot_0 Fig. 20) ist, weil sie nach § 11, 6, II die Tangente § 11, (26) enthält, die durch O gehende Tangentialebene der Kurve im Punkte $\lambda = \infty$; ihre drei Schnittpunkte sind $\lambda = 0, \infty, \infty$.

2. Die Transformationsformeln. Zur Vermittlung zwischen dem rechtwinkligen System $Oxyz$ und dem schiefwinkligen $O\xi\eta\zeta$ dienen für *Punktkoordinaten* die Formeln (I § 37, (2); (5)):

$$(2)\quad x = \xi + \frac{a'}{b_0}\eta + \frac{a''}{c_0}\zeta,\quad y = \frac{b}{b_0}\eta + \frac{b'}{c_0}\zeta,\quad z = \frac{c}{c_0}\zeta,\quad t = \tau;$$

$$(3)\quad \xi = x - \frac{a'}{b}y + \frac{a'b' - a''b}{bc}z,\quad \eta = b_0\frac{cy - b'z}{bc},\quad \zeta = c_0\frac{z}{c},\quad \tau = t$$

und für *Ebenenkoordinaten* (I § 45, (23)), unter u', v', w', s', die auf $O\xi\eta\zeta$ bezüglichen verstanden:

$$(4)\quad u' = u,\quad v' = \frac{a'u + bv}{b_0},\quad w' = \frac{a''u + b'v + cw}{c_0},\quad s' = s;$$

$$(5)\quad u = u',\quad v = \frac{-a'u' + b_0v'}{b},\quad w = \frac{(a'b' - a''b)u' - b_0b'v' + c_0bw'}{bc},\quad s = s'.$$

3. Parameterdarstellung der Raumkurve im schiefwinkligen System. Setzt man nun die Werte § 6, (14) in (3) und § 7, (11) in (4) ein, so folgt, *wenn man nachträglich das neue System wieder $Oxyz$ nennt und b_0, c_0 wieder mit b, c bezeichnet:*

In dem schiefwinkligen System $Oxyz$ der Scheitelelemente lautet die Parameterdarstellung der Punkte und Schmiegungsebenen der Raumkurve 3. O.:

$$(6)\quad \varrho x = a\lambda^3,\quad \varrho y = b\lambda^2,\quad \varrho z = c\lambda,\quad \varrho t = l\lambda^2 + m\lambda + n;^{1)}$$

$$(7)\quad \sigma u = \frac{n}{a},\quad \sigma v = \frac{(l\lambda^2 - 3n)\lambda}{b},\quad \sigma w = \frac{(m\lambda + 3n)\lambda^2}{c},\quad \sigma s = -\lambda^3,$$

wo l, m, n die Werte § 6, (18) *haben.*

Die Formeln (6) zeigen wiederum, daß in den drei Ebenen $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ bezüglich die drei Kurvenpunkte $\lambda = 0, 0, 0$; $\lambda = 0, 0, \infty$;

1) Möbius, Werke 1, S. 157 (1827); Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 201; J. f. Math. 58 (1861), S. 149; v. Drach, kub. Kegelschn., S. 55.

$\lambda = 0, \infty, \infty$ liegen, die Formeln (7), daß durch die Punkte $u = 0$ und $s = 0$ je drei zusammenfallende Schmiegungsebenen $\lambda = \infty$ und $\lambda = 0$ gehen (§ 7, 8).

4. Sehnen, Achsen und Tangenten. Da die Ableitung der Gleichungen § 8, (2) und (4) aus § 7, (1) ebenso für schiefwinklige wie für rechtwinklige Koordinaten gilt, so hat man, um aus (6) die entsprechenden Folgerungen zu ziehen, nur:

$$(8) \qquad a' = 0, \quad a'' = 0, \quad b' = 0$$

zu setzen.

Die *Gleichungen der Sehne* $\lambda_1 \lambda_2$ werden daher im *schiefwinkligen* System $Oxyz$ nach § 8, (2):

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - (\lambda_1 + \lambda_2)\dfrac{y}{b} + \lambda_1 \lambda_2 \dfrac{z}{c} = 0, \\ (l\lambda_1\lambda_2 - n)\dfrac{y}{b} + (m\lambda_1\lambda_2 + n(\lambda_1 + \lambda_2))\dfrac{z}{c} - \lambda_1\lambda_2 t = 0, \end{cases}$$

und die *Gleichungen der Achse* $\lambda_1 \times \lambda_2$ nach § 8, (4):

$$(10) \qquad \begin{cases} b\lambda_1\lambda_2 v + c(\lambda_1 + \lambda_2)w + (l\lambda_1\lambda_2 + m(\lambda_1 + \lambda_2) + 3n)s = 0, \\ 3a\lambda_1\lambda_2 u + b(\lambda_1 + \lambda_2)v + cw + (l(\lambda_1 + \lambda_2) + m)s = 0. \end{cases}$$

Die *Parameterdarstellung der Tangenten* aber wird nach § 8, (11):

$$(11) \qquad \begin{cases} \varrho p_{23} = bc\lambda^2, \varrho p_{31} = -2ca\lambda^3, \varrho p_{12} = ab\lambda^4, \varrho p_{14} = a(l\lambda^2 + 2m\lambda + 3n)\lambda^2, \\ \varrho p_{24} = b(m\lambda + 2n)\lambda, \quad \varrho p_{34} = -c(l\lambda^2 - n). \end{cases}$$

5. Flächenbündel und Flächenschar. Infolge von (8) nehmen die linearen Funktionen § 7, (3), bis auf den gemeinsamen Faktor abc, und die linearen Funktionen § 7, (13) die Werte an:

$$(12) \qquad y_1 = n\frac{x}{a}, \; y_2 = n\frac{y}{b}, \; y_3 = n\frac{z}{c}, \; y_4 = -\left(l\frac{y}{b} + m\frac{z}{c} - t\right);$$

$$(13) \qquad v_1 = au, \quad v_2 = bv + ls, \quad v_3 = cw + ms, \quad v_4 = ns.$$

Gleichzeitig wird dann aus § 9, (3), bis auf den Faktor ab^2c^2, und aus § 10, (3):

$$(14) \qquad \begin{cases} f = l\dfrac{y^2}{b^2} + m\dfrac{y}{b}\dfrac{z}{c} + n\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y}{b}t, \quad -g = n\dfrac{y}{b}\dfrac{z}{c} + m\dfrac{z}{c}\dfrac{x}{a} + l\dfrac{x}{a}\dfrac{y}{b} - \dfrac{x}{a}t, \\ h = n\left(\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z}{c}\dfrac{x}{a}\right); \end{cases}$$

$$(15) \qquad \begin{cases} F = b^2v^2 - 3acwu - 3amus + 2blvs + l^2s^2, \\ G = bcvw - 9anus + bmvs + clws + lms^2, \\ H = c^2w^2 - 3bnvs + 2cmws - (3ln - m^2)s^2. \end{cases}$$

Mit den Werten (14) und (15) stellen dann die Gleichungen (§ 9, (25); § 10, (43)):

(16) $\varrho f + \sigma g + \tau h = 0$; (17) $\varrho F + \sigma G + \tau H = 0$

das Bündel aller durch die Kurve (6) gehenden Flächen 2. O. und die Scharschar aller von den Schmiegungsebenen (7) berührten Flächen 2. Kl. dar.

Mit der Bedingung § 9, (33); (34) ist (16) der Sehnenkegel λ und (17) der Achsenkegelschnitt λ.

6. Darstellung der Raumkurve 3. O. durch drei Flächen. Im Sinne von § 7, **9**, I; II ist die Raumkurve (6), (7) in Punkt- und Ebenenkoordinaten durch *die drei Gleichungen:*

(18) $f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0$; (19) $F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0$

dargestellt.

In (18) ist $f = 0$ *der Sehnenzylinder* $\lambda = \infty$, $h = 0$ *der Sehnenkegel* $\lambda = 0$ (§ 9, **5**), $g = 0$ *das hyperbolische Paraboloid der Sehnen* $\lambda, -\lambda$ (§ 9, **16**); in (19) *sind* $F = 0$ *und* $H = 0$ *die Achsenkegelschnitte in den Schmiegungsebenen* $\lambda = \infty$ *und* $\lambda = 0$, $G = 0$ *das hyperbolische Paraboloid der Achsen* $\lambda \times -\lambda$ (§ 10, **14**).

III. Kapitel.

Die Rotationsflächen der kub. Kegelschnitte.

§ 13. Anzahl und Lage der Berührungssehnen.

1. Begriff der Berührungssehne einer Rotationsfläche 2. O. Die Gleichung § 9, (5); (30) umfaßt mit ihren *zwei* verfügbaren Parameterverhältnissen $\varrho : \sigma : \tau$ *alle* durch die Raumkurve 3. O. § 6, (14) gehenden *Flächen 2. O.* Unter diesen werden sich eine begrenzte Zahl von *Rotationsflächen* befinden, da für eine solche *zwei* Bedingungen erfüllt sein müssen (II § 100, **3**).

Eine Rotationsfläche 2. O. hat die charakteristische Eigenschaft, daß in ihrer, auf ein Koordinatensystem $Oxyz$ der *Hauptachsenrichtungen* bezogenen Gleichung (II § 90, (12)):

(1) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0$

zwei der *Hauptachsenkoeffizienten* a_{11}, a_{22}, a_{33} gleich sind, etwa:

(2) $$a_{22} = a_{33}.$$

Die *Schnittkurve* r *der Rotationsfläche mit der unendlich fernen Ebene:*

(3) $$a_{11}x^2 + a_{22}(y^2 + z^2) = 0, \quad t = 0$$

hat dann mit dem *imaginären Kugelkreis* oder *absoluten Kegelschnitt* k:

(4) $$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0$$

zwei mal zwei zusammenfallende Schnittpunkte B, B':

(5) $$x^2 = 0, \quad y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0$$

berührt ihn also in zwei Punkten B, B' (Fig. 21 sind r und k mit ihren Berührungspunkten reell dargestellt). Die Verbindungslinie BB' dieser beiden Punkte, $x = 0$, $t = 0$, soll kurz *die Berührungssehne der Rotationsfläche* genannt werden. Die durch die Berührungssehne BB' gehenden Ebenen $x = ct$ bilden das einzige System der Kreisschnittebenen der Rotationsfläche (1); (2) (II § 100, 2, II).

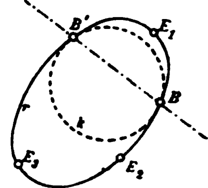


Fig. 21.

2. Arten von Rotationsflächen der Raumkurve 3. O. Nach der Art der *durch die Raumkurve 3. O.* überhaupt hindurchgehenden Flächen 2. O. (§ 9, **15**) kommen von Rotationsflächen (II § 117, **13**) nur in Frage: *Das einschalige Rotationshyperboloid, der Rotationskegel, der Rotationszylinder und der parabolische Zylinder.* Der letztere entspricht in (1), (2) dem Falle $a_{22} = 0$. Seine Schnittkurve (3) mit der Ebene $t = 0$ hat, als *Doppelgerade* $x^2 = 0$, zwei mal zwei Schnittpunkte (5) mit dem Kreise (4). Sie ist selbst die Berührungssehne, und die durch sie gehenden „Kreisschnittebenen" $x = ct$ schneiden den parabolischen Zylinder nach (1) in einer endlichen und einer unendlich fernen Geraden.

3. Allgemeine Bestimmung der Rotationsflächen. Die unendlich ferne Kurve r einer die Raumkurve 3. O. enthaltenden Fläche 2. O. überhaupt muß durch *die drei unendlich fernen Punkte* E_1, E_2, E_3 *der Raumkurve* gehen. Diese bilden bei der kub. Ellipse und Hyperbel (§ 6, (14); (19), I; II), die wir zunächst ins Auge fassen, *ein Dreieck* $E_1E_2E_3$. Für eine Rotationsfläche muß die Kurve r außerdem den Kugelkreis k doppelt berühren.

I. *Die unendlich ferne Kurve einer durch die Raumkurve gehenden Rotationsfläche ist also* (Fig. 21) *ein Kegelschnitt* r, *der durch die drei gegebenen Punkte* E_1, E_2, E_3 *geht und den gegebenen Kegelschnitt* k *doppelt berührt.*[1])

Der so bestimmte Kegelschnitt r vertritt als solcher *fünf* Punkte. Die Fläche 2. O., die durch ihn und noch *vier* endliche Punkte der

---

1) L. Cremona, J. f. Math. 63 (1864), S. 143; Dixon, Quart. J. 24 (1889), S. 30.

Raumkurve 3. O. gerade bestimmt ist, enthält sieben Punkte der Raumkurve und damit die ganze Raumkurve 3. O., da diese sonst mit einer Fläche 2. O. nur sechs Punkte gemein haben kann (§ 31, **1**).

II. *Es wird also zu jedem nach I bestimmten Kegelschnitt r eine durch die Raumkurve gehende Rotationsfläche gehören.*

Wir bestimmen zunächst die Kegelschnitte r.

4. Notwendige Eigenschaft der Berührungssehne. Alle Kegelschnitte r, die den Kugelkreis k (Fig. 21) in den unbekannten Punkten B, B' berühren, bilden einen *Kegelschnittbüschel.* Diesem gehört, neben k selbst, der gesuchte Kegelschnitt r, sowie die als Doppellinie gedachte Berührungssehne BB' an.

Jede Gerade schneidet den Kegelschnittbüschel in einer *Punktinvolution* (II § 48, 8), deren einer *Doppelpunkt* der Schnittpunkt der Geraden mit der Doppellinie BB' ist. Nun ist auf der Seite $s_3 = E_1 E_2$ des Dreiecks $E_1 E_3 E_2$ (Fig. 22) die Punktinvolution vollständig bestimmt, da zwei ihrer Punktepaare (II § 8, 7), nämlich die Schnittpunkte E_1 und E_2 mit r und die Schnittpunkte S_3, S_3' mit k bekannt sind. Einer der beiden, dann ebenfalls bekannten Doppelpunkte D_3, D_3' der Involution, etwa D_3, muß also auf BB' liegen. Dasselbe muß für die Seiten $s_2 = E_3 E_1$ und $s_1 = E_2 E_3$ gelten, die k in S_2, S_2' und S_1, S_1' schneiden und deren Involutionen die Doppelpunkte D_2, D_2' und D_1, D_1' haben mögen.

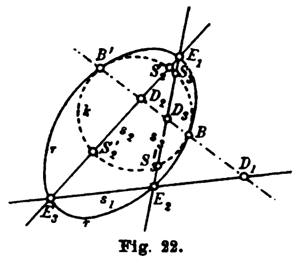


Fig. 22.

III. *Auf der Berührungssehne BB' muß also von jeder der drei Involutionen, die auf den Seiten s_1; s_2; s_3 durch die Punktepaare $E_2 E_3$, $S_1 S_1'$; $E_3 E_1$, $S_2 S_2'$; $E_1 E_2$, $S_3 S_3'$ (Fig. 22) bestimmt sind, je ein Doppelpunkt D_1; D_2; D_3 liegen.*

5. Lagebeziehung der sechs Doppelpunkte. Nach Bestimmung der sechs Doppelpunkte D_1, D_1' auf s_1; D_2, D_2' auf s_2 und D_3, D_3' auf s_3 betrachten wir zunächst die vier letzteren und verbinden je zwei ungleichnamige (mit verschied. unteren Indizes) mit einander.

IV. *Die Verbindungslinien $D_2 D_3$, $D_2' D_3'$, $D_2 D_3'$, $D_2' D_3$ bilden ein vollständiges Vierseit (Fig. 23).*

Dieses hat, außer den vier Ecken D_2, D_3, D_2', D_3', noch zwei weitere Ecken: $D_4 = D_2 D_3 \times D_2' D_3'$ und $D_4' = D_2 D_3' \times D_2' D_3$ und, außer den zwei Nebenseiten $s_3 = D_3 D_3'$ und $s_2 = D_2 D_2'$, noch eine

dritte Nebenseite $s_4 = D_4 D_4'$, welche s_3 und s_2 in E_4 und E_4' schneiden möge (Fig. 23).

Auf der Nebenseite s_3 sind die auf ihr liegenden Ecken D_3, D_3' und die Schnittpunkte E_1, E_4 mit den beiden anderen Nebenseiten harmonisch (I § 27, 7, III'). Da aber D_3, D_3' nach ihrer Entstehung unter 4 als Doppelpunkte der Involution auf s_3 auch zu E_1, E_2 harmonisch sind, muß $E_4 = E_2$ sein; ebenso auf $s_2 : E_4' = E_3$. Dann fällt auch $s_4 = E_4 E_4'$ mit $s_1 = E_2 E_3$ zusammen (Fig. 24).

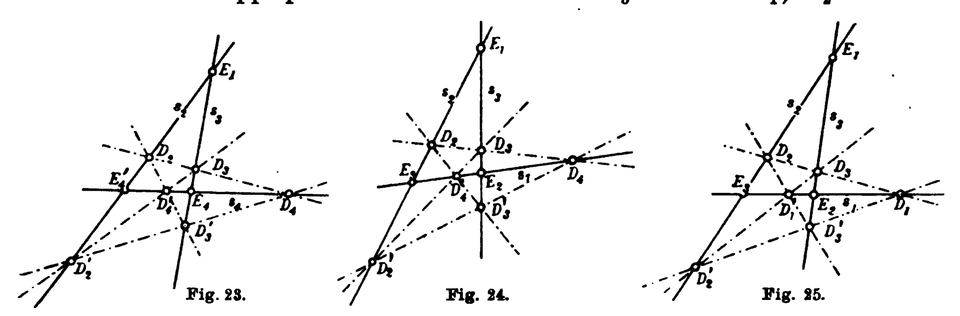


Fig. 23. Fig. 24. Fig. 25.

V. *Die Seiten* s_1, s_2, s_3 *sind daher die Nebenseiten des vollständigen Vierseits in IV.*

Auf der Nebenseite s_1 (Fig. 24) sind die auf ihr liegenden Ecken D_4, D_4' zu den Schnittpunkten E_2, E_3 mit den beiden anderen Nebenseiten harmonisch.

In dem vollständigen Vierseit (Fig. 24) sind ferner die Gegenecken D_2, D_2' sowohl, wie D_3, D_3' nach ihrer Entstehung unter 4 harmonische Pole des Kugelkreises k; dasselbe gilt daher (II § 48, 7 IV dual) von den dritten Gegenecken D_4, D_4'.

Da somit D_4, D_4' sowohl zu E_2, E_3 als zu S_1, S_1' harmonisch sind, so sind D_1, D_1' nach ihrer Entstehung unter 4 mit D_4, D_4' identisch (Fig. 25).

VI. *Die Doppelpunkte* D_1, D_1'; D_2, D_2'; D_3, D_3' *der Involutionen, die auf den drei Seiten* s_1; s_2; s_3 *des Dreiecks* $E_1 E_2 E_3$ *durch die jedesmaligen Ecken* E_2, E_3; E_3, E_1; E_1, E_2 *und die jedesmaligen Schnittpunkte* S_1, S_1'; S_2, S_2'; S_3, S_3' *mit dem imaginären Kugelkreis* k *bestimmt werden, bilden die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen drei Nebenseiten die Seiten* s_1, s_2, s_3 *sind* (Fig. 25).

Die *vier Seiten des vollständigen Vierseits* sind dann die einzig möglichen Verbindungslinien je zweier ungleichnamiger der sechs Doppelpunkte D_1, D_1'; D_2, D_2'; D_3, D_3' und enthalten je drei ungleichnamige von diesen (Fig. 25).

VII. *Sie sind daher nach* **4**, *III die einzig möglichen Berührungssehnen.*

6. Hinreichende Eigenschaft einer Berührungssehne. Greift man andererseits irgend eine Seite $D_2 D_3$ des vollständigen Vierecks **5**, IV heraus (Fig. 22), so ist durch den Kugelkreis k und die Gerade $D_2 D_3$, als Doppellinie genommen, der Büschel der Kegelschnitte bestimmt, die k in den Schnittpunkten B, B' mit der Doppellinie berühren. Durch jeden Punkt der Ebene $t = 0$, etwa durch E_1, ist ein solcher Kegelschnitt r bestimmt.

Die Seite s_3 schneidet den Büschel in einer Involution, die durch das Punktepaar S_3, S_3' und den Doppelpunkt D_3 bestimmt, also dieselbe ist, die unter **4** durch S_3, S_3' und E_1, E_2 bestimmt war. Daher muß der zweite Schnittpunkt von r mit s_3 der zu E_1 gehörige Punkt E_2 der Involution sein, also r durch E_2, und ebenso auch durch E_3 gehen.

VIII. *Zu jeder der vier Seiten des vollständigen Vierseits (Fig. 25) gehört auch wirklich ein durch die drei Punkte E_1, E_2, E_3 gehender Kegelschnitt r, der den Kugelkreis k in seinen zwei Schnittpunkten mit der Seite berührt.*

IX. *Es wird daher bei der kub. Ellipse und Hyperbel vier Kegelschnitte r von der Eigenschaft* **3**, *I geben.*

7. Zusammenfall zweier der drei Punkte E_1, E_2, E_3. Fallen die beiden Punkte E_2 und E_3 zusammen (§ 6, (14); (19), III), so wird s_1 die Tangente der Raumkurve im doppelt zählenden unendlich fernen Punkte $E_2 = E_3$. Auf dieser ist dann nach **4** (Fig. 26) $E_2 = E_3$ selbst der eine Doppelpunkt D_1' der durch E_2, E_3 und S_1, S_1' bestimmten Involution und daher D_1 als harmonischer Pol von $D_1' = E_2 = E_3$ in bezug auf den Kugelkreis k bestimmt. Dagegen auf $s_2 = s_3$ bestimmen sich $D_2 = D_3$ und $D_2' = D_3'$ wie in **4** als Doppelpunkte der Involution der Punktepaare E_1, $E_2 = E_3$ und $S_2 = S_3$, $S_2' = S_3'$ (Fig. 22).

Fig. 26.

Von den vier Seiten des vollständigen Vierseits fallen dann $D_2 D_3'$ und $D_2' D_3$ in $s_2 = s_3$ hinein, während die beiden anderen D_1 mit $D_2 = D_3$ und $D_2' = D_3'$ verbinden.

VII'. *Bei der kub. hyperb. Parabel gibt es daher eine doppelt zählende und zwei einfach zählende Berührungssehnen.*

IX'. *Ihnen entsprechen drei Kegelsehnitte r,* von denen der erste die doppelt zählende Berührungssehne selbst ist, da sie alle drei Punkte $E_1 E_2 E_3$ enthält.

Fallen alle drei Punkte E_1, E_2, E_3 zusammen (§ 6, (14); (19), IV), so wird der Grenzübergang[1]) unsicher. Jedoch werden sich hier, im Falle der kub. Parabel, die Rotationsflächen auf direktem Wege ergeben (§ 15, 6).

§ 14. Die unendlich fernen Kurven der Rotationsflächen.

1. Das Dreieck der unendlich fernen Punkte. Für die analytische Bestimmung der Berührungssehnen, gehen wir von den Gleichungen § 6, (14); (18), II der *kub. Hyperbel* aus:

(1) $$x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda, \quad y = b\lambda^2 + b'\lambda, \quad z = c\lambda, \quad t = \lambda^2 - e^2.$$

Die *Koordinaten der drei unendlich fernen Punkte* $\lambda = \infty$, $\lambda = e$, $\lambda = -e$ der Kurve (1) haben (neben $t = 0$, was wir überall nicht ausdrücklich angeben) die Koordinaten:

(2) $$\begin{aligned} &E_1 : x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0;\\ &E_2 : x_0 = ae^3 + a'e^2 + a''e, \quad y_0 = be^2 + b'e, \quad z_0 = ce;\\ &E_3 : x_0' = -ae^3 + a'e^2 - a''e, \quad y_0' = be^2 - b'e, \quad z_0' = -ce. \end{aligned}$$

Da hiernach:

(3) $$y_0 z_0' - z_0 y_0' = -2bce^3, \quad z_0 x_0' - x_0 z_0' = 2a'ce^3, \quad x_0 y_0' - y_0 x_0' = 2Ae$$

mit der Abkürzung:

(4) $$A = abe^2 - a'b' + a''b,$$

so sind die *Gleichungen der drei Seiten des Dreiecks* $E_1E_2E_3$:

(5) $$s_1 : -bcx + a'cy + Az = 0; \quad s_2 : z_0'y - y_0'z = 0; \quad s_3 : z_0 y - y_0 z = 0^3$$

2. Die Involutionen auf den Seiten s_2 und s_3. Die Seite s_3 schneidet den imaginären Kugelkreis § 13, (4) in den Punkten (Fig. 22).

(6) $$S_3 : x_1 = iw_0, \ y_1 = y_0, \ z_1 = z_0; \quad S_3' : x_2 = -iw_0, \ y_2 = y_0, \ z_2 = z_0,$$

wo zur Abkürzung:

(7) $$w_0 = \sqrt{\overline{\overline{y_0^2 + z_0^2}}}$$

gesetzt ist, die doppelt gestrichene Quadratwurzel absolut verstanden.

Das Dreieck XYZ (Fig. 27) der unendlich fernen Punkte der Achsen des rechtwinkligen Systems $Oxyz$ dient zugleich als *Koordinatendreieck in der unendlich fernen Ebene* und ist, weil das System rechtwinklig ist, ein *Polardreieck des Kugelkreises* § 13, (4).

---

1) L. Cremona, J. f. Math. 63 (1864), S. 142.

Die Seite s_3 des Dreiecks $E_1E_2E_3$ in (5) kann niemals in die Seite $z = 0$ des Dreiecks XYZ fallen, da $z_0 = ce \neq 0$ (§ 6, (15)). Man kann daher x, z als homogene Koordinaten der Punkte von s_3 nehmen (I § 28, **16**); es sind zugleich die der Strahlen, welche die Punkte von s_3 mit Y verbinden (Fig. 27). In jenem Sinne ist die Gleichung der durch die Punktepaare S_3, S_3' und E_1, E_2 in (6) und (2) bestimmten Involution, wenn x, z und x', z' irgend zwei entsprechende Punktepaare bedeuten (II § 8, (17)):

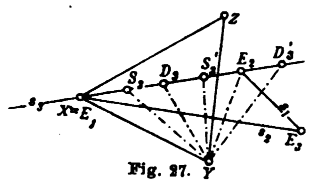


Fig. 27.

$$\begin{vmatrix} xx' & xz' + zx' & zz' \\ x_1x_2 & x_1z_2 + z_1x_2 & z_1z_2 \\ 1\cdot x_0 & 1\cdot z_0 + 0\cdot x_0 & 0\cdot z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xx' & xz' + zx' & zz' \\ w_0^2 & 0 & z_0^2 \\ x_0 & z_0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$(8) \qquad z_0^2 xx' - x_0z_0(xz' + zx') - w_0^2 zz' = 0.$$

Für die Doppelpunkte D_3, D_3' (§ 13, 4) dieser Involution bestimmt die quadratische Gleichung:

$$(9) \qquad z_0^2x^2 - 2x_0z_0xz - w_0^2z^2 = 0$$

das Verhältnis $x:z$. Ihre drei Koordinaten x, y, z werden daher, da für alle Punkte auf s_3 nach (5) $y:z = y_0:z_0$ ist, bis auf einen gemeinsamen Faktor:

$$(10) \qquad D_3: x_0 + w,\ y_0,\ z_0; \quad D_3': x_0 - w,\ y_0,\ z_0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(11) \qquad w = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

In gleicher Weise schneidet die Seite s_2 den Kugelkreis in den Punkten:

$$(6') \quad S_2: x_1' = iw_0',\ y_1' = y_0',\ z_1' = z_0'; \quad S_2': x_2' = -iw_0',\ y_2' = y_0',\ z_2' = z_0',$$

$$(7') \qquad w_0' = \sqrt{y_0'^2 + z_0'^2},$$

und werden die Doppelpunkte der durch die Punktepaare S_2, S_2' und E_1, E_3 bestimmten Involution:

$$(10') \qquad D_2: x_0' + w',\ y_0',\ z_0'; \quad D_2': x_0' - w',\ y_0'\ z_0',$$

$$(11') \qquad w' = \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}.$$

Mit (10), (10') *sind die Doppelpunkte* D_3, D_3' *und* D_2, D_2' *der* § 13, 4 *eingeführten Involutionen auf den Seiten* s_3 *und* s_2 *bestimmt.*

3. Die Gleichungen der Berührungssehnen. Sie liefern ihrerseits nach § 13, 5, IV; VII das Vierseit der Berührungssehnen D_2D_3, $D_2'D_3$, D_2D_3', $D_2'D_3'$. Die Gerade D_2D_3 hat nach (10), (10′) die Gleichung:

$$(y_0z_0'-z_0y_0')x+(z_0(x_0'+w')-(x_0+w)z_0')y+((x_0+w)y_0'-y_0(x_0'+w'))z=0$$

oder nach (3) und (2):

$$(12)\qquad D_2D_3:-2bce^2x+c(2a'e^2+w+w')y \\ +(2Ae^2+be(w-w')-b'(w+w'))z=0.$$

Beim Übergang von D_2D_3 zu $D_2'D_3$ ändert sich nach (10′) nur das Vorzeichen von w', so daß:

$$(12)\qquad D_2'D_3:-2bce^2x+c(2a'e^2+w-w')y \\ +(2Ae^2+be(w+w')-b'(w-w'))z=0,$$

und entsprechend:

$$(12)\qquad \begin{cases} D_2D_3':-2bce^2x+c(2a'e^2-w+w')y \\ \qquad +(2Ae^2+be(-w-w')-b'(-w+w'))z=0, \\ D_2'D_3':-2bce^2x+c(2a'e^2-w-w')y \\ \qquad +(2Ae^2+be(-w+w')-b'(-w-w'))z=0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) *stellen also die vier Berührungssehnen* § 13, 5, VII *dar.*

Durch Addition der ersten und vierten oder der zweiten und dritten Gleichung (12) folgt jedesmal die erste Gleichung (5), woraus in Übereinstimmung mit § 13, 5, V hervorgeht:

Die Schnittpunkte $D_1=D_2D_3\times D_2'D_3'$ *und* $D_1'=D_2'D_3\times D_2D_3'$ *liegen auf* s_1 (Fig. 25).

4. Die vier reellen Berührungssehnen der kub. Hyperbel. Bei der kub. Hyperbel (1) sind die Punkte E_1, E_2, E_3 in (2) alle drei reell und die absolut gedachten Quadratwurzeln w und w' in (11) und (11′) stets reell und von 0 verschieden. Damit werden auch die Doppelpunkte D_3, D_3'; D_2, D_2' in (10) und (10′) und die Verbindungslinien (12) alle vier reell.

Indem die Gleichungen (12) noch mit $2e^2$ dividiert und in eine zusammengefaßt werden, ergibt sich:

Bei der kub. Hyperbel (1) *gibt es vier*[1]) *reelle Berührungssehnen, deren Gleichungen aus der gemeinsamen Form:*

$$(13)\qquad -bcx+(a'+p)cy+((ae^2+a''+q)b-(a'+p)b')z=0$$

1) L. Cremona, J. f. Math. 63 (1864), S. 143.

hervorgehen, indem für p, q der Reihe nach die Wertpaare:

$$(14)\quad p, q = \frac{w+w'}{2e^2},\ \frac{w-w'}{2e};\ \frac{w-w'}{2e^2},\ \frac{w+w'}{2e};\ -\frac{w-w'}{2e^2},\ -\frac{w+w}{2e};$$
$$-\frac{w+w'}{2e^2},\ -\frac{w-w'}{2e}$$

mit den Werten (11), (11′) *von w, w' gesetzt werden.*

Da nach (11), (11′) und (2):

$$(15)\quad \begin{cases} w^2 = \{(ae^2+a'')^2+(a'^2+b^2)e^2+b'^2+c^2+2((ae^2+a'')a'+bb')e\}e^2, \\ w'^2 = \{(ae^2+a'')^2+(a'^2+b^2)e^2+b'^2+c^2-2((ae^2+a'')a'+bb')e\}e^2, \end{cases}$$

so ist:

$$(16)\quad \begin{cases} w^2+w'^2 = 2\{(ae^2+a'')^2+(a'^2+b^2)e^2+b'^2+c^2\}e^2, \\ w^2-w'^2 = 4\{(ae^2+a'')a'+bb'\}e^3, \end{cases}$$

und daher für alle vier Wertepaare (14):

$$(17)\quad e^2p^2+q^2 = (ae^2+a'')^2+(a'^2+b^2)e^2+b'^2+c^2,$$

$$(18)\quad pq = (ae^2+a'')a'+bb'.$$

5. Die zwei reellen Berührungssehnen der kub. Ellipse. Um die vorstehenden Ergebnisse von der kub. Hyperbel (1) auf die *kub. Ellipse:*

$$(19)\quad x = a\lambda^3+a'\lambda^2+a''\lambda,\quad y = b\lambda^2+b'\lambda,\quad z = c\lambda,\quad t = \lambda^2+e^2$$

zu übertragen, hat man überall ei für e zu setzen.

Von dem Dreieck der unendlich fernen Punkte:

$$(20)\quad \begin{aligned} &E_1: x = 1,\quad y = 0,\quad z = 0; \\ &E_2: x_0 = -a'e^2-(ae^2-a'')ei,\ y_0 = -be^2+b'ei,\ z_0 = cei; \\ &E_3: x_0' = -a'e^2+(ae^2-a'')ei,\ y_0' = -be^2-b'ei,\ z_0' = -cei, \end{aligned}$$

sind die Ecken E_2 und E_3 imaginär. Von den Seiten (5) bleibt s_1 reell, nur mit $-e^2$ für e^2 in (4), während s_2 und s_3 imaginär werden.

Die Quadrate der Wurzeln (11), (11′) erhalten statt (15) die Werte:

$$(21)\quad \begin{cases} w^2 = \{-(ae^2-a'')^2+(a'^2+b^2)e^2-(b'^2+c^2)+2((ae^2-a'')a'-bb')ei\}e^2, \\ w'^2 = \{-(ae^2-a'')^2+(a'^2+b^2)e^2-(b'^2+c^2)-2((ae^2-a'')a'-bb')ei\}e^2, \end{cases}$$

worauf dann statt (16):

$$(22)\quad \begin{cases} w^2+w'^2 = 2\{-(ae^2-a'')^2+(a'^2+b^2)e^2-(b'^2+c^2)\}e^2, \\ w^2-w'^2 = 4\{(ae^2-a'')a'-bb'\}e^3i. \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen:

$$(23)\quad \alpha = -(ae^2-a'')^2+(a'^2+b^2)e^2-(b'^2+c^2),\quad \beta = 2((ae^2-a'')a'-bb')e$$

ist nach (21):

$$(24)\qquad w^2 = (\alpha + \beta i)e^2, \quad w'^2 = (\alpha - \beta i)e^2.$$

Die Wurzeln w, w', deren reeller Teil positiv ist, sind dann:

$$(25)\qquad w = (\mathsf{A} + \mathsf{B}i)e, \quad w' = (\mathsf{A} - \mathsf{B}i)e,$$

wo mit positiven Werten, der doppelt gestrichenen reellen Wurzeln[1]):

$$(26)\qquad \mathsf{A} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}, \quad \mathsf{B} = \varepsilon\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}},$$

und das Vorzeichen $\varepsilon = \pm 1$ aus der zweiten der beiden Gleichungen:

$$(27)\qquad \mathsf{A}^2 - \mathsf{B}^2 = \alpha, \quad 2\mathsf{AB} = \beta$$

zu bestimmen ist ($\varepsilon = \operatorname{sign}\beta$).[1])

Indem nun in den Gleichungen (13), (14) e durch ei ersetzt wird, nehmen sie die Gestalt an:

$$(28)\qquad -bcx + (a' + p)cy + ((-ae^2 + a'' + q)b - (a' + p)b')z = 0,$$

$$p, q = -\frac{w + w'}{2e^2}, \frac{w - w'}{2ei}; \; -\frac{w - w'}{2e^2}, \frac{w + w'}{2ei}; \; \frac{w - w'}{2e^2}, -\frac{w + w'}{2ei}; \; \frac{w + w'}{2e^2}, -\frac{w - w'}{2ei},$$

oder nach (25):

$$(29)\qquad p, q = -\frac{\mathsf{A}}{e}, \mathsf{B}; \; -\frac{\mathsf{B}i}{e}, \frac{\mathsf{A}}{i}; \; \frac{\mathsf{B}i}{e}, -\frac{\mathsf{A}}{i}; \; \frac{\mathsf{A}}{e}, -\mathsf{B}.$$

Es werden also nur die zwei Berührungssehnen (12) reell, welche die nach (20) und (25) konjugiert imaginären Punkte D_2 und D_3, D_2' und D_3' in (10), (10') verbinden.[2])

Bei der kub. Ellipse (19) *gibt es zwei reelle Berührungssehnen, deren Gleichungen aus der gemeinsamen Form:*

$$(30)\qquad -bcx + (a' + p)cy + ((-ae^2 + a'' + q)b - (a' + p)b')z = 0$$

hervorgehen, indem für p, q die Wertepaare:

$$(31)\qquad p, q = -\frac{\mathsf{A}}{e}, \mathsf{B}; \; \frac{\mathsf{A}}{e}, -\mathsf{B}$$

gesetzt werden mit den Werten (26) *von* A, B.

Für beide Wertepaare (31) ist nach (27):

$$-e^2p^2 + q^2 = -\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 = -\alpha, \quad pq = -\frac{\mathsf{AB}}{e} = -\frac{\beta}{2e},$$

---

1) C. F. Gauß, Werke 2, S. 104.

2) L. Cremona, J. f. Math. 63 (1864), S. 144.

oder nach (23):

(32) $$-e^2p^2 + q^2 = (ae^2 - a'')^2 - (a'^2 + b^2)e^2 + b'^2 + c^2,$$

(33) $$pq = -(ae^2 - a'')a' + bb',$$

wie auch aus (17) durch Vertauschung von e^2 mit $-e^2$ hervorgeht.

6. Die drei reellen Berührungssehnen der kub. hyperb. Parabel. Von dem Dreieck der drei unendlich fernen Punkte E_1, E_2, E_3 der *kub. hyperb. Parabel:*

(34) $$x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda, \quad y = b\lambda^2 + b'\lambda, \quad z = c\lambda, \quad t = \lambda - e,$$

fallen zwei Ecken E_2 und E_3 in die Ecke X ($x = 1$, $y = 0$, $z = 0$) des Koordinatendreiecks XYZ hinein (Fig. 28), während die dritte die Koordinaten hat:

(35) $$E_1 : x_0 = ae^3 + a'e^2 + a''e, \quad y_0 = be^2 + b'e, \quad z_0 = ce.$$

Fig. 28.

Die Gleichungen der drei Seiten, von denen s_1 die Tangente § 8, (33) der Raumkurve im Punkte $E_2 = E_3$ oder $\lambda = \infty$ ist, werden:

(36) $$s_1 : z = 0; \quad s_2 = s_3 : z_0 y - y_0 z = 0.$$

Die Doppelpunkte der Involution (§ 13, 7), die auf $s_2 = s_3$ durch die Schnittpunkte S_3, S_3' mit dem Kugelkreis und die Punkte E_1, E_2 bestimmt ist, sind wegen der Übereinstimmung von s_3 in (36) und (5) und von E_1, E_2 in (35) mit E_2, E_1 in (2), genau wie in (10):

(37) $$D_2 = D_3 : x_0 + w, \ y_0, \ z_0; \quad D_2' = D_3' : x_0 - w, \ y_0, \ z_0,$$

wo:

(38) $$w = ep, \quad p = \sqrt{(ae^2 + a'e + a'')^2 + (be + b')^2 + c^2}.$$

Es sind ferner auf der Tangente s_1 nach 2, Abs. 2, X und Y harmonische Pole des Kugelkreises, also nach § 13, 7:

(39) $$D_1 = Y, \quad D_1' = E_2 = E_3 = X.$$

Die beiden Berührungssehnen D_1D_2 und D_1D_2' (Fig. 28) haben daher die Gleichungen:

(40) $$z_0 x - (x_0 + w)z = 0; \quad z_0 x - (x_0 - w)z = 0,$$

während $D_2D_3' = D_2'D_3$ in $s_2 = s_3$ in (36) hineinfallen.

Bei der kub. hyperb. Parabel (34) *gibt es drei*[1]) *reelle Berührungssehnen mit den Gleichungen:*

1) L. Cremona, J. f. Math. 63 (1864), S. 143.

(41) $cx-(ae^2+a'e+a''\pm p)z=0$; (42) $cy-(be+b')z=0$,
wo p *den Wert* (38) *hat.*

7. Die unendlich fernen Kurven der Rotationsflächen der kub. Hyperbel. Die unendlich ferne Kurve r einer durch die kub. Hyperbel (1) gehenden Rotationsfläche gehört nach § 13, 6 dem Kegelschnittbüschel an, der durch den Kugelkreis § 13, (4) und die doppelt gelegte Berührungssehne (13) bestimmt ist und daher mit einem Parameter μ die Gleichung hat:

$$(43)\qquad \{-bcx+(a'+p)cy+((ae^2+a''+q)b-(a'+p)b')z\}^2 \\ -\mu(x^2+y^2+z^2)=0.$$

Innerhalb dieses Büschels ist die Kurve r dadurch bestimmt, daß sie durch den Punkt E_1 in (2) hindurchgeht. Daher hat μ für sie den Wert: b^2c^2. Setzt man aber diesen Wert μ und die Koordinaten von E_2 oder E_3 aus (2) in (43) ein, so folgen mit Rücksicht auf (11), (11′) die Gleichungen:

$$\{bce(ep+q)\}^2-b^2c^2w^2=0,\quad \{bce(ep-q)\}^2-b^2c^2w'^2=0,$$

die erfüllt sind, weil nach (14):

$$e(ep+q)=\pm w,\quad e(ep-q)=\pm w'.$$

Die Kurve r geht also (§ 13, 6) auch durch E_2 und E_3, so daß der Satz gilt:

Der Kegelschnitt:

$$(44)\qquad \{-bcx+(a'+p)cy+((ae^2+a''+q)b-(a'+p)b')z\}^2 \\ -b^2c^2(x^2+y^2+z^2)=0,\ t=0$$

hat für jedes der vier Wertepaare (14) *die Eigenschaft, daß er durch die drei unendlich fernen Punkte* E_1, E_2, E_3 *der kubischen Hyperbel* (1) *geht und den Kugelkreis doppelt berührt.*

8. Die unendlich fernen Kurven der Rotationsflächen der kub. Ellipse. In derselben Weise ergibt sich im Anschluß an (30):

Der Kegelschnitt:

$$(45)\qquad \{-bcx+(a'+p)cy+((-ae^2+a''+q)b-(a'+p)b')z\}^2 \\ -b^2c^2(x^2+y^2+z^2)=0,\ t=0$$

hat für jedes der beiden Wertepaare (31) *die Eigenschaft, daß er durch die drei unendlich fernen Punkte* E_1, E_2, E_3 *der kub. Ellipse* (19) *geht und den Kugelkreis doppelt berührt.*

In der Tat gibt die Substitution der Koordinaten von E_2 oder E_3 aus (20):

$$\{bce(-ep+qi)\}^2 - b^2c^2w^2 = 0, \quad \{bce(-ep-qi)\}^2 - b^2c^2w'^2 = 0$$

und ist andererseits nach (31) und (25):

$$e(-ep+qi) = \pm e(\mathsf{A}+\mathsf{B}i) = \pm w,$$
$$e(-ep-qi) = \pm e(\mathsf{A}-\mathsf{B}i) = \pm w'.$$

9. Die unendlich fernen Kurven der Rotationsflächen der kub. hyperb. Parabel. *Bei der kub. hyperb. Parabel geht* (nach (41)) *der den Kugelkreis doppelt berührende Kegelschnitt:*

$$(46) \quad \{cx - (ae^2 + a'e + a'' \pm p)z\}^2 - c^2(x^2+y^2+z^2) = 0,\ t = 0,$$

mit dem Werte (38) *von* p, *einerseits durch den unendlich fernen Punkt* E_1 *in* (35) *und andererseits durch den doppelt zählenden Punkt* $E_2 = E_3 = X$, *indem er hier die Tangente* $z = 0$ *der Raumkurve berührt.*

Außerdem ist die doppelt zählende Berührungssehne (42):

$$(47) \qquad \{cy - (be+b')z\}^2 = 0$$

selbst ein den Kugelkreis doppelt berührender Kegelschnitt, der durch die drei unendlich fernen Punkte E_1, E_2 und $E_3 = E_2$ der Raumkurve hindurchgeht.

10. Weitere Aufgabe und kub. Parabel. Nachdem in (44)—(47) die unendlich fernen Kurven der durch die Raumkurve 3. O. gehenden Rotationsflächen hergestellt sind, bleibt noch übrig, die *Gleichungen dieser Rotationsflächen* selbst zu ermitteln.

Dabei wird sich auch die *kub. Parabel* noch erledigen lassen.

§ 15. Die Gleichungen der Rotationsflächen.

1. Bestimmung der Bündelparameter. *Jede durch die Raumkurve 3. O.* § 6, (14) *hindurchgehende Fläche 2. O.* hat eine Gleichung von der Form § 9, (5) mit den Werten § 9, (30) der Koeffizienten, in denen ϱ, σ, τ homogene Parameter sind.

Die *unendlich ferne Kurve einer solchen Fläche* hat die Gleichung:

$$(1) \qquad a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0,\ t = 0,$$

deren Koeffizienten den fünf ersten Formeln § 9, (30) zu entnehmen sind.

Soll aber die Fläche eine *Rotationsfläche* sein, muß ihre unendlich ferne Kurve, zunächst für die kub. Hyperbel die Gleichung § 14, (44) haben. Daher müssen die Koeffizienten § 9, (30) von (1) und die von § 14, (44) einander proportional, oder, da der Proportionali-

tätsfaktor in ϱ, σ, τ aufgenommen werden kann, einander gleich sein. So ergeben sich durch Gleichsetzen der Koeffizienten a_{22}, a_{31}, a_{12}, wobei in § 9, (30) noch $l = 1$, $m = 0$, $n = -e^2$ zu nehmen ist, die Bedingungen:

$$(2)\quad \begin{aligned} a\varrho + a'\sigma - ae^2\tau &= (a'+p)^2 - b^2, \\ b'\sigma + be^2\tau = -2((ae^2 + a'' + q)b &- (a'+p)b'), \quad \sigma = 2(a'+p). \end{aligned}$$

Hieraus folgen *für die Bündelparameter* ϱ, σ, τ *die Werte*:

$$(3)\quad \begin{aligned} a\varrho &= -a'^2 - b^2 - 2a(ae^2 + a'' + q) + p^2, \\ \sigma &= 2(a'+p), \quad e^2\tau = -2(ae^2 + a'' + q), \end{aligned}$$

mit denen noch:

$$(4)\quad a\varrho + a'\sigma = -b^2 - 2a(ae^2 + a'' + q) + (a'+p)^2.$$

2. Bestimmung der Koeffizienten. Sind hiernach die Parameter ϱ, σ, τ so bestimmt worden, daß die Koeffizienten a_{22}, a_{31}, a_{12} in § 9, (30) den gleichnamigen in § 14, (44) gleich werden, so müssen die mit diesen Parametern (3) gebildeten Koeffizienten a_{23} und a_{33} in § 9, (30) von selbst den gleichnamigen in § 14, (44) gleich werden. Man kann dies in der Tat bestätigen unter Benutzung der Formeln (4) und § 14, (17); (18). Dann aber ist überhaupt die linke Seite der Gleichung § 14, (44) mit dem Teil (1) der Gleichung § 9, (5), (30) identisch, und man hat nur noch in den Koeffizienten $2a_{14}$, $2a_{24}$, $2a_{34}$ von § 9, (30) die Werte (3) von ϱ, σ, τ einzusetzen. Dies gibt mit Rücksicht auf (4):

$$(5)\quad \begin{cases} 2a_{14} = 2b^2c^2(a'+p), \quad 2a_{24} = bc^2\{b^2 + 2a(ae^2 + a'' + q) - (a'+p)^2\}, \\ 2a_{34} = bc\{(-b^2 - 2a(ae^2 + a'' + q) + (a'+p)^2)b' - 2a''b(a'+p)\}. \end{cases}$$

3. Die vier Rotationsflächen der kub. Hyperbel. So ergibt sich schließlich der Satz:

Die Gleichung der vier durch die kub. Hyperbel § 14, (1) *gehenden Rotationsflächen lautet:*

$$(6)\quad \begin{aligned} &\{-bcx + (a'+p)cy + ((ae^2 + a'' + q)b - (a'+p)b')z\}^2 \\ &\quad - b^2c^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0. \end{aligned}$$

Hier haben $2a_{14}$, $2a_{24}$, $2a_{34}$ die Werte (5) und p, q die Werte § 14, (14). Die Gleichung (6) entspricht den Werten (3) der Parameter ϱ, σ, τ des Bündels in § 9, (30).

4. Die zwei Rotationsflächen der kub. Ellipse. Die Betrachtungen unter **1**; **2** knüpften an die Formeln § 14, (44); (17); (18) an, die sich auf die kub. Hyperbel beziehen; die entsprechenden § 14, (45),

(32), (33) für die kub. Ellipse haben nur $-e^2$ an Stelle von e^2, also folgt in gleicher Weise:

Die Gleichung der beiden durch die kub. Ellipse § 14, (19) *gehenden Rotationsflächen lautet:*

$$(7)\quad \begin{gathered}\{-bcx + (a'+p)cy + ((-ae^2 + a'' + q)b - (a'+p)b')z\}^2 \\ - b^2c^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0.\end{gathered}$$

Hier ist:

$$(8)\ \begin{cases}2a_{14} = 2b^2c^2(a'+p),\ 2a_{24} = bc^2\{b^2 + 2a(-ae^2 + a'' + q) - (a'+p)^2\}, \\ 2a_{34} = bc\{(-b^2 - 2a(-ae^2 + a'' + q) + (a'+p)^2)b' - 2a''b(a'+p)\},\end{cases}$$

und haben p, q die Werte § 14, (31). Die Gleichung (7) entspricht, nach (3) mit $-e^2$ für e^2, den Werten:

$$(9)\quad \begin{gathered}a\varrho = -a'^2 - b^2 - 2a(-ae^2 + a'' + q) + p^2, \\ \sigma = 2(a'+p),\ e^2\tau = 2(-ae^2 + a'' + q)\end{gathered}$$

der Bündelparameter ϱ, σ, τ in § 9, (30), wo überdies $l=1, m=0, n=e^2$.

5. Die drei Rotationsflächen der kub. hyperb. Parabel. Für $l=0$, $m=1$, $n=-e$ werden die Koeffizienten § 9, (30) der unendlich fernen Kurve (1) der Bündelfläche ϱ, σ, τ:

$$(10)\ \begin{cases} a_{22} = -ac^2e\tau, \\ a_{33} = -ab(be+b')\varrho - b(ab'e + a'b' - a''b)\sigma - e(ab'^2 - a'bb' + a''b^2)\tau, \\ 2a_{23} = c\{ab\varrho + b(ae+a')\sigma - (a'b - 2ab')e\tau\}, \\ 2a_{31} = -b^2c(\sigma - e\tau),\ 2a_{12} = 0.\end{cases}$$

Die entsprechenden Koeffizienten der mit ae multiplizierten Gleichung § 14, (46) sind:

$$(11)\quad a_{22} = -ac^2e,\ a_{33} = ae(A^2 - c^2),\ 2a_{23} = 0,\ 2a_{31} = -2aceA,\ 2a_{12} = 0$$

mit der Abkürzung:

$$(12)\quad A = ae^2 + a'e + a'' \pm p,$$

und die mit $-ae$ multiplizierten von § 14, (17):

$$(13)\quad \begin{gathered}a_{22} = -ac^2e,\ a_{33} = -ae(be+b')^2,\ 2a_{23} = 2ace(be+b'), \\ 2a_{31} = 0,\ 2a_{12} = 0.\end{gathered}$$

Die Vergleichung der Koeffizienten a_{22}, a_{23}, a_{31} in (10) und (11) gibt:

$$\tau = 1,\ ab\varrho + b(ae+a')\sigma - (a'b - 2ab')e\tau = 0,\ b^2(\sigma - e\tau) = 2aeA,$$

und daraus:

$$(14)\quad b^2\varrho = -2(ae+a')Ae - be(be+2b'),\ b^2\sigma = (2aA + b^2)e,\ \tau = 1.$$

Die Koeffizienten a_{33} in (10) und (11) werden damit von selbst gleich und die drei letzten in § 9, (30) werden:

$$(15)\quad \begin{cases} 2a_{14} = c^2(2aA + b^2)e,\ 2ba_{24} = c^2e(2a^2eA + ab(be + 2b') - a'b^2), \\ 2ba_{34} = -ce\{2a(ab'e + a''b)A + abb'(be + 2b') - (a'b' - a''b)b^2\}. \end{cases}$$

Die Vergleichung der Koeffizienten a_{22}, a_{23}, a_{31} in (10) und (13) gibt:

$$\tau = 1,\ ab\varrho + b(ae + a')\sigma - (a'b - 2ab')e\tau = 2ae(be + b'),\ \sigma - e\tau = 0$$

und daraus:

$$(16)\qquad \varrho = e^2,\ \sigma = e,\ \tau = 1$$

und nach § 9, (30):

$$(17)\quad 2a_{14} = b^2c^2e,\ 2a_{24} = -(ae + a')bec^2,\ 2a_{34} = bce(ab'e + a'b' - a''b).$$

Durch die kub. hyperb. Parabel § 14, (34) *gehen zuerst die zwei Rotationsflächen:*

$$(18)\quad ae(cx - Az)^2 - aec^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0$$

mit den Werten (12) von A und § 14, (38) von p. Die Koeffizienten a_{14}, a_{24}, a_{34} haben die Werte in (15), die Bündelparameter ϱ, σ, τ die Werte in (14).

Dazu kommt noch *als dritte Rotationsfläche:*

$$(19)\quad -ae\{cy - (be + b')z\}^2 + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0$$

mit den Werten (17) von a_{14}, a_{24}, a_{34}. Sie ist *der parabolische Zylinder* § 9, (17) mit den Werten (16) der Bündelparameter.

6. Die zwei Rotationsflächen der kub. Parabel. Für $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$ werden die ersten Koeffizienten § 9, (30) der Bündelfläche ϱ, σ, τ:

$$(20)\quad \begin{aligned} &a_{11} = 0,\ a_{22} = ac^2\tau,\ a_{33} = ab^2\varrho + abb'\sigma + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2)\tau, \\ &2a_{23} = c\{-ab\sigma + (a'b - 2ab')\tau\},\ 2a_{31} = -b^2c\tau,\ 2a_{12} = 0. \end{aligned}$$

Eine solche Fläche ist, da $a_{12} = 0$, eine Rotationsfläche, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist (II § 100, 3):

$$(21)\quad a_{23} \neq 0,\ a_{31} = 0,\ a_{12} = 0,\ (a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33}) - a_{23}^2 = 0,$$

oder:

$$(22)\quad a_{31} \neq 0,\ a_{12} = 0,\ a_{23} = 0,\ (a_{22} - a_{33})(a_{22} - a_{11}) - a_{31}^2 = 0,$$

oder:

$$(23)\quad a_{23} = 0,\ a_{31} = 0,\ a_{12} = 0 \text{ und } a_{22} = a_{33} \text{ oder } a_{33} = a_{11} \text{ oder } a_{11} = a_{22}.$$

Die Bedingungen (21) würden nach (20) erfordern, daß $\tau = 0$ und damit $a_{22} = 0$. Dann würde aber die letzte Gleichung (21) sich auf

$a_{23}^2 = 0$ verkürzen und der ersten widersprechen. Die Bedingungen (22) geben neben $\tau \neq 0$:

$$-ab\sigma + (a'b - 2ab')\tau = 0,$$

$$4a(ab^2\varrho + abb'\sigma + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2 - ac^2)\tau) + b^4\tau = 0$$

oder, indem $\tau = ab$ angenommen wird:

(24) $4ab\varrho = 4a(ab'^2 + ac^2 - a''b^2) - b^4, \; \sigma = a'b - 2ab', \; \tau = ab.$

Mit diesen Werten wird dann nach (20) und § 9, (30):

(25) $$a_{22} = a^2bc^2, \; 4a_{33} = b(4a^2c^2 - b^4), \; 2a_{31} = -ab^3c;$$

(26) $$\begin{cases} 2a_{14} = b^2c^2(a'b - 2ab'), \\ 8a_{24} = -c^2\{4a(ab'^2 + ac^2 - a''b^2) - b^4 + 4a'b(a'b - 2ab')\}, \\ 8a_{34} = c\{4ab'(ab'^2+ac^2-a''b^2)-b^4b'+4b(a'b-2ab')(a'b'-a''b)\}. \end{cases}$$

Die Bedingungen (23) verlangen $\tau = 0$, $\sigma = 0$, worauf mit $\varrho = 1$:

(27) $$a_{11} = 0, \; a_{22} = 0, \; a_{33} = ab^2 \neq 0,$$

also die Bedingung $a_{11} = a_{22}$ erfüllt ist. Zugleich wird nach § 9, (30):

(28) $$2a_{14} = 0, \; 2a_{24} = -abc^2, \; 2a_{34} = abb'c.$$

Mit den Koeffizienten (25) folgt nunmehr:

Durch die kub. Parabel:

(29) $$x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda, \; y = b\lambda^2 + b'\lambda, \; z = c\lambda, \; t = 1$$

geht die Rotationsfläche:

(30) $$-b(2acx+b^2z)^2+4a^2bc^2(x^2+y^2+z^2)+8a_{14}xt+8a_{24}yt+8a_{34}zt=0$$

mit den Werten (26) *von* a_{14}, a_{24}, a_{34} *und den Bündelparametern* (24).

Dazu kommt nach (27) und (28) noch die Rotationsfläche:

(31) $$bz^2 - c^2yt + b'czt = 0,$$

der *parabolische Zylinder* § 9, (20).

7. Berührungssehnen bei der kub. Parabel. *Die Berührungssehnen der beiden Rotationsflächen* (30) und (31) sind nach der Form der Gleichungen:

(32) $2acx + b^2z = 0, \; t = 0$; (33) $z = 0, \; t = 0.$

Die letztere ist *die Tangente* § 8, (39) *der kub. Parabel* im dreifach zählenden unendlich fernen Punkte $E_1 = E_2 = E_3 = X$, die erstere BB' geht durch die Ecke Y des Koordinatendreiecks XYZ (Fig. 29). Daher hat Y in bezug auf den Kugelkreis k und die unendlich ferne Kurve r der Fläche (30)

Fig. 29.

dieselbe Polare $XP = XZ(y=0)$. Der Schnittpunkt D von BB' mit $y=0$ ist einer der beiden Doppelpunkte D, D' der Involution, die auf $y=0$ durch die Schnittpunkte X, P mit r und diejenigen mit k bestimmt wird (§ 13, 4).

§ 16. Besondere Fälle von Rotationsflächen.

1. Kub. Ellipse mit Rotationszylinder. Bei der kub. Ellipse:

$$(1)\qquad x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda,\quad y = b\lambda^2 + b'\lambda,\quad z = c\lambda,\quad t = \lambda^2 + e^2$$

haben die Seiten s_2 und s_3 des Dreiecks $E_1E_2E_3$ der drei unendlich fernen Punkte § 14, (20) nach § 14, (5) die Linienkoordinaten:

$$(2)\qquad \begin{aligned} u &= 0, & v &= z_0' = -cei, & w &= -y_0' = be^2 + b'ei;\\ u &= 0, & v &= z_0 = cei, & w &= -y_0 = be^2 - b'ei, \end{aligned}$$

die gleichzeitig die drei ersten Koordinaten der durch die Seiten gehenden Ebenen u, v, w, s im Raume sind (I § 49, 4). Da nun mit den Werten (2):

$$(3)\qquad u^2 + v^2 + w^2 = e^2(b^2e^2 - c^2 - b'^2 \pm 2bb'ei),$$

so folgt (II § 84, (9')):

I. *Die Bedingungen:*

$$(4)\qquad b' = 0,\quad b^2e^2 - c^2 = 0 \quad (c = \varepsilon be,\ \varepsilon = \pm 1)$$

sind notwendig und hinreichend dafür, daß die beiden imaginären Seiten E_1E_2 und E_1E_3 des Dreiecks der unendlich fernen Punkte der kub. Ellipse (1) *Tangenten des imaginären Kugelkreises k sind* (in Fig. 30 schematisch als reell dargestellt).

Fig. 30.

Der durch die Kurve (1) gehende einzige Zylinder § 9, (10); (5) kann, da für ihn:

$$a_{11} = 0,\quad a_{22} \neq 0,\quad a_{33} \neq 0,\quad a_{31} = 0,\quad a_{12} = 0,$$
$$(a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33}) - a_{23}^2 = b^2c^2e^2 \neq 0$$

ist, nur dann eine Rotationsfläche sein, wenn (§ 15, (21); (23)):

$$a_{23} = -b'c = 0,\quad a_{33} - a_{22} = b^2e^2 + b'^2 - c^2 = 0.$$

I'. *Der im Allgemeinen elliptische Zylinder der kub. Ellipse* (1) *ist immer und nur unter den Bedingungen* (4) *ein Rotationszylinder (gerader Kreiszylinder).*[1])

1) F. Lindemann, Vorles. Raum (1891), S. 251; Th. Reye, Geom. d. L. 2 (1892), S. 321.

2. Die beiden Rotationsflächen der kub. Ellipse (1), (4). Im Falle (4) wird nach § 14, (23):

$$\alpha = -(ae^2 - a'')^2 + a'^2e^2, \quad \beta = 2(ae^2 - a'')a'e$$

und damit:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = (ae^2 - a'')^2 + a'^2e^2; \ \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2a'^2e^2,$$
$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2(ae^2 - a'')^2.$$

Nach § 14, (26); (27) ist dann, da $e > 0$:

$$\mathsf{A} = \delta a'e (\delta = \text{sign.}\, a'), \quad \mathsf{B} = \delta(ae^2 - a''); \quad 2\mathsf{AB} = 2(ae^2 - a'')a'e,$$

und nach § 14, (31) haben p, q die Werte:

(5) $p = -a'$, $q = ae^2 - a''$, oder: (6) $p = a'$, $q = -(ae^2 - a'')$.

Da für das Wertepaar (5): $a' + p = 0$, $-ae^2 + a'' + q = 0$, so gehört dazu nach § 15, (7); (8) als *erste Rotationsfläche:*

$$(7) \qquad y^2 + z^2 - byt = 0,$$

also der mit (4) aus § 9, (10) entstehende *Rotationszylinder.*

Für das Wertepaar (6) wird $a' + p = 2a'$, $-ae^2 + a'' + q = -2(ae^2 - a'')$ und damit nach § 15, (7); (8) mit (4) die Gleichung der *zweiten Rotationsfläche:*

$$(8) \quad (4a'^2 - b^2)e^2y^2 + (4(ae^2 - a'')^2 - b^2e^2)z^2 - 8\varepsilon a'e(ae^2 - a'')yz$$
$$+ 4\varepsilon be(ae^2 - a'')zx - 4a'be^2xy + 4a'b^2e^2xt$$
$$- be^2(4a(ae^2 - a'') + 4a'^2 - b^2)yt - 4\varepsilon a'a''bezt = 0.$$

Die unendlich ferne Kurve des Zylinders (7) ist das imaginäre Linienpaar r_0r_0 (Fig. 30), dessen Seiten den Kugelkreis k in B_0, B_0' berühren und das die drei Punkte E_1, E_2, E_3 der Kurve (1), den ersten E_1 als Doppelpunkt, enthält. Die zugehörige Berührungssehne B_0B_0' ist die Seite $x = 0$ des Dreiecks XYZ. Die unendlich ferne Kurve r der Fläche (8) berührt den Kugelkreis in B, B'. Die zugehörige Berührungssehne BB' hat nach § 15, (7) die Gleichung:

$$(9) \qquad bex - 2a'ey + 2\varepsilon(ae^2 - a'')z = 0.$$

3. Kub. Ellipse mit Rotationszylinder und Rotationskegel. Die Bündelparameter der Fläche (8) haben nach § 15, (9) die Werte:

$$(10) \quad a\varrho = 4a(ae^2 - a'') - b^2, \ \sigma = 4a', \ e^2\tau = -4(ae^2 - a''),$$

sodaß:

$$(11) \quad -\tfrac{1}{4}ae^2(\varrho\tau - \sigma^2) = 4a((ae^2 - a'')^2 + a'^2e^2) - (ae^2 - a'')b^2.$$

Während daher die Fläche (8) im allgemeinen ein *Rotationshyperboloid* ist (§ 9, (32)), wird sie im Falle (§ 9, (33)):

$$(12) \qquad 4a((ae^2 - a'')^2 + a'^2e^2) - (ae^2 - a'')b^2 = 0$$

ein *Rotationskegel, der Sehnenkegel des Punktes:*

$$(13) \qquad \lambda = \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{4a(ae^2 - a'') - b^2}{4aa'} = \frac{-a'e^2}{ae^2 - a''}.$$

Sind für die kub. Ellipse (1) *die Bedingungen* (4) *und* (12) *erfüllt, so geht durch sie ein Rotationszylinder und ein Rotationskegel.*

Ist neben (4) die Bedingung (12) dadurch erfüllt, daß:

$$(14) \qquad a' = 0, \; 4a(ae^2 - a'') - b^2 = 0, \; ae^2 - a'' \neq 0$$

so wird der Rotationskegel der *Scheitelkegel* $\lambda = 0$. Seine Gleichung wird nach (8), (4) und (14):

$$(15) \qquad ac^2y^2 + a''b^2z^2 - b^2czx = 0,$$

in Übereinstimmung mit § 9, (7).

4. Kub. Ellipse mit nur einer Rotationsfläche. Für die beiden imaginären unendlich fernen Punkte E_2 und E_3 der kub. Ellipse in § 14, (20) ist nach § 14, (11), (11'); (24):

$$w^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = e^2(\alpha + \beta i),$$
$$w'^2 = x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 = e^2(\alpha - \beta i),$$

woraus mit Rücksicht auf die Werte § 14, (23) von α und β folgt (in Fig. 31 reell dargestellt):

Fig. 31.

II. *Die beiden imaginären unendlich fernen Punkte der kub. Ellipse (1) liegen immer dann und nur dann auf dem imaginären Kugelkreis*[1] § 13, (4)), *wenn:*

$$(16) \quad (ae^2 - a'')^2 - (a'^2 + b^2)e^2 + b'^2 + c^2 = 0, \; (ae^2 - a'')a' - bb' = 0.$$

Mit $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ist dann auch $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{B} = 0$ (§ 14, (26)) und $p = 0$, $q = 0$ (§ 14, (31)). Aber auch umgekehrt können die beiden Wertepaare § 14, (31) nur gleich werden, wenn $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{B} = 0$ und nach § 14, (27) $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

II'. *Immer und nur unter der Bedingung* (16) *fallen die beiden durch die kub. Ellipse gehenden Rotationsflächen in eine einzige zusammen.*[2])

1) W. Wirtinger, Wien. Sitz.ber. 94 (1886), 2. Abt., S. 302; R. Bricard, S. M. F. Bull. 32 (1904), S. 269; J. Majcen, Agram Ak. 158 (1904), S. 69; A. Grünwald, Zeitschr. Math. Phys. 55 (1907), S. 264; F. Rulf, Monatsh. f. Math. 21 (1910), S. 329.

2) L. Cremona, J. f. Math. 63 (1864), S. 144; A. Hurwitz, Math. Ann. 30 (1887), S. 298.

Die Gleichung dieser *Rotationsfläche* lautet nach § 15, (7); (8):

$$(17)\quad \{bcx - a'cy + ((ae^2 - a'')b + a'b')z\}^2 - b^2c^2(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$+ 2a'b^2c^2xt - bc^2(2a(ae^2 - a'') + a'^2 - b^2)yt$$
$$+ bc((2a(ae^2 - a'') + a'^2 - b^2)b' - 2a'a''b)zt = 0.$$

Ihre *Berührungssehne:*

$$(18)\qquad bcx - a'cy + ((ae^2 - a'')b + a'b')z = 0$$

ist nach § 14, (5) die Seite $s_1 = E_2E_3$ des Dreiecks $E_1E_2E_3$ (Fig. 31).

5. Kub. Ellipse mit Rotationskegel. Die Bündelparameter der Fläche (17) sind nach § 15, (9):

$$(19)\quad a\varrho = 2a(ae^2 - a'') - a'^2 - b^2,\ \sigma = 2a',\ e^2\tau = -2(ae^2 - a''),$$

sodaß:

$$(20)\quad -\tfrac{1}{2}ae^2(\varrho\tau - \sigma^2) = 2a((ae^2 - a'')^2 + a'^2e^2) - (ae^2 - a'')(a'^2 + b^2).$$

Ist für die kub. Ellipse (1) neben (16) die Bedingung:

$$(21)\qquad 2a((ae^2 - a'')^2 + a'^2e^2) - (ae^2 - a'')(a'^2 + b^2) = 0$$

erfüllt, so ist die einzige durch sie gehende Rotationsfläche ein Rotationskegel. Er ist der Sehnenkegel des Punktes:

$$(22)\qquad \lambda = \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{2a(ae^2 - a'') - a'^2 - b^2}{2aa'} = \frac{-a'e^2}{ae^2 - a''}.$$

Er wird im besonderen der Scheitelkegel $\lambda = 0$, wenn die Bedingung (21) dadurch erfüllt ist daß:

$$a' = 0,\ ae^2 - a'' \neq 0,\ 2a(ae^2 - a'') - b^2 = 0,$$

womit aus (16) wird:

$$(ae^2 - a'')^2 - b^2e^2 + c^2 = 0,\ \ b' = 0.$$

Daraus folgt schließlich, daß *unter den Bedingungen:*

$$(23)\quad a' = 0,\ b' = 0,\ b^2 = 2a(ae^2 - a''),\ c^2 = (ae^2 + a'')(ae^2 - a'')$$

die einzige durch die kub. Ellipse gehende Rotationsfläche der Scheitelkegel ist.

Seine Gleichung wird nach (17) und (23), wie in (15):

$$(24)\qquad ac^2y^2 + a''b^2z^2 - b^2czx = 0.$$

6. Der kub. Kreis. Unter den Bedingungen (4) berühren die Seiten E_1E_2 und E_1E_3 des unendlich fernen Dreiecks der kub. Ellipse (1) den Kugelkreis (Fig. 30), unter den Bedingungen (16) liegen die Ecken E_2, E_3 auf dem Kugelkreis (Fig. 31). Wenn die Bedingungen

(4) und (16) gleichzeitig erfüllt sind, gelten beide Folgerungen (Fig. 32). Infolge von (4) wird aber aus (16):

$$(ae^2 - a'')^2 - a'^2 e^2 = 0, \quad (ae^2 - a'')a' = 0,$$

was nur möglich, wenn beide Faktoren der zweiten Gleichung verschwinden, also:

I. *Immer und nur dann, wenn für die kub. Ellipse* (1) *die Bedingungen erfüllt sind:*

(25) $a' = 0, \; b' = 0, \; ae^2 - a'' = 0, \; b^2e^2 - c^2 = 0 \quad (c = \varepsilon b e, \; \varepsilon = \pm 1)$

liegen die beiden imaginären Ecken E_2 *und* E_3 *des unendlich fernen Dreiecks* $E_1E_2E_3$ *auf dem Kugelkreis und sind die beiden imaginären Seiten* E_1E_2 *und* E_1E_3 *die Tangenten des Kugelkreises in ihnen.*

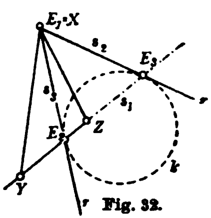


Fig. 32.

Wir nennen die Kurve (1) dann einen *kubischen Kreis*[1]). Die Parameterdarstellung (1) nimmt für den kub. Kreis nach (25) die Form an:

(26) $\quad x = a\lambda(\lambda^2 + e^2), \qquad y = b\lambda^2, \qquad z = \varepsilon b e \lambda, \qquad t = \lambda^2 + e^2,$

während die *zweite* Rotationsfläche (8) des Falles (4) und die *einzige* Rotationsfläche (17) des Falles (16) sich beide in dem Rotationszylinder (7) vereinigen.

II. *Die einzige durch den kub. Kreis gehende Rotationsfläche ist der Rotationszylinder* (7).

III. Da man in (26) das Vorzeichen von λ umkehren darf, kann das doppelte Vorzeichen von z auch nach x verlegt und dann in a aufgenommen werden.

7. Rotationsflächen der gleichseitigen kub. Hyperbel. Das Koordinatendreieck XYZ in der unendlich fernen Ebene ist nach § 14, 2 ein Polardreieck des imaginären Kugelkreises k. Soll auch das Dreieck $E_1E_2E_3$ der kub. Hyperbel in § 14, (2) ein solches Polardreieck sein, so müssen, da die Ecken E_1 und X zusammenfallen, auch die Seiten E_2E_3 und YZ zusammenfallen, also E_2 und E_3 auf der Seite $x = 0$ liegen und überdies harmonische Pole des Kugelkreises sein. Dies gibt nach § 14, (2) die Bedingungen:

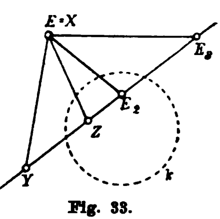


Fig. 33.

$$x_0 = 0, \qquad x_0' = 0; \qquad y_0y_0' + z_0z_0' = 0 \qquad \text{oder (Fig. 33):}$$

1) A. Schoenflies, Geom. d. Beweg., Leipzig 1886, S. 117; W. Fiedler, Darstell. Geom. 2 (1885), S. 132; F. Schuh, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), S. 377; R. O. Consentius, ebd. 25 (1880), S. 119 bezeichnet als kub. Kreis die kub. Ellipse § 16, 1.

Das Dreieck der unendlich fernen Punkte der kub. Hyperbel § 14, (1) *ist ein Polardreieck des imaginären Kugelkreises unter den Bedingungen:*

$$(27) \qquad ae^2 + a'' = 0, \quad a' = 0, \quad b^2e^2 - b'^2 - c^2 = 0.$$

Es sind die der *gleichseitigen* kub. Hyperbel in § 9, (47).

Die vier durch diese Hyperbel gehenden *gleichseitigen Rotationshyperboloide* sind nach § 15, (6):

$$(28) \qquad \begin{aligned} &\{bcx - cpy + (b'p - bq)z\}^2 - b^2c^2(x^2 + y^2 + z^2) \\ &+ 2b^2c^2pxt + bc^2(2aq + b^2 - p^2)yt \\ &- bc((2aq + b^2 - p^2)b' + 2a''bp)zt = 0, \end{aligned}$$

wo nach § 14, (15), (17), (18) in den Wertepaaren p, q:

$$(29) \qquad \begin{aligned} &w^2 = ((be + b')^2 + c^2)e^2, \quad w'^2 = ((be - b')^2 + c^2)e^2; \\ &e^2p^2 + q^2 = 2b^2e^2, \quad pq = bb', \end{aligned}$$

und die Bündelparameter nach § 15, (3) die Werte haben:

$$(30) \qquad a\varrho = -b^2 - 2aq + p^2, \quad \sigma = 2p, \quad e^2\tau = -2q.$$

8. Kub. Parabel mit Rotationskegel. Die Bündelparameter des einen durch die kub. Parabel gehenden Rotationshyperboloides haben die Werte § 15, (24). Unter der Bedingung:

$$(31) \qquad 4(\varrho\tau - \sigma^2) = 4a(ab'^2 + ac^2 - a''b^2) - 4(a'b - 2ab')^2 - b^4 = 0$$

geht jedoch dieses Hyperboloid in einen *Rotationskegel* über, den *Sehnenkegel* des Punktes:

$$(32) \qquad \lambda = \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{4a(ab'^2 + ac^2 - a''b^2) - b^4}{4ab(a'b - 2ab')} = \frac{a'b - 2ab'}{ab}.$$

Für den Fall:

$$(33) \qquad 2ab' - a'b = 0, \quad 4a(ab'^2 + ac^2 - a''b^2) - b^4 = 0$$

wird dieser Rotationskegel § 15, (30) der Sehnenkegel $\lambda = 0$ (§ 9, (7)):

$$(34) \qquad 4a^2c^2y^2 + (4a^2c^2 - b^4)z^2 - 4ab^2czx = 0.$$

IV. Kapitel.

Die einzelnen Arten der kub. Kegelschnitte.

§ 17. Die kubische Ellipse.

1. Anordnung. Wir haben bisher die *gemeinsamen* Eigenschaften aller Raumkurven 3. O. in den Vordergrund gestellt, jedoch immer schon auf die Besonderheiten der vier Arten § 6, (18) hingewiesen. Wir stellen nun in der Folge den Artbegriff voran und verbinden die

bisher zerstreuten Eigenschaften mit anderen neu abzuleitenden Eigenschaften zu einem *Gesamtbild jeder einzelnen Art.*

2. Die Parameterdarstellungen. Bezogen auf ein *rechtwinkliges* System $Oxyz$ wird die *kub. Ellipse* nach § 6, (14); (18); § 7, (11) und § 8, (11) allgemein durch die folgende *Parameterdarstellung ihrer Punkte, Schmiegungsebenen nnd Tangenten* gegeben:

$$(1)\quad \begin{cases} x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda, \\ y = \qquad b\lambda^2 + b'\lambda, \\ z = \qquad\qquad c\lambda, \\ t = \lambda^2 + e^2; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} u = bce^2, \\ v = (a\lambda^3 - 3ae^2\lambda - a'e^2)c, \\ w = a\lambda(-b'\lambda^2 + 3be^2\lambda + 3b'e^2) \\ \qquad + (a'b' - a''b)e^2, \\ s = -abc\lambda^3; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} p_{23} = bc\lambda^2, & p_{14} = a\lambda^4 + (3ae^2 - a'')\lambda^2 + 2a'e^2\lambda + a''e^2, \\ p_{31} = -(2a\lambda + a')c\lambda^2, & p_{24} = -b'(\lambda^2 - e^2) + 2be^2\lambda, \\ p_{12} = (a\lambda(b\lambda + 2b') + a'b' - a''b)\lambda^2, & p_{34} = -c(\lambda^2 - e^2), \end{cases}$$

wo $abce \neq 0$ und ohne Beschränkung $e = 1$ gesetzt werden kann.

3. Durchdringung von Zylinder und Kegel. Die Kurve ist nach § 11, (21); (20) der *übrige Durchschnitt* des *elliptischen Zylinders*:

$$(4)\qquad c^2y^2 - 2b'cyz + (b^2e^2 + b'^2)z^2 - bc^2yt + bb'czt = 0$$

(Fig. 34 durch zwei Schnitte h und h' in den parallelen Ebenen Oyz und $O'y'z'$ gegeben) und des *Kegels*:

$$(5)\quad ac^2y^2 + (a'b - 2ab')cyz + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2)z^2 - b^2czx = 0$$

(Fig. 34 durch die Spitze O und den Schnitt k' in der Ebene $O'y'z'$ gegeben), welche beiden Flächen *außerdem* die x-Achse gemein haben.

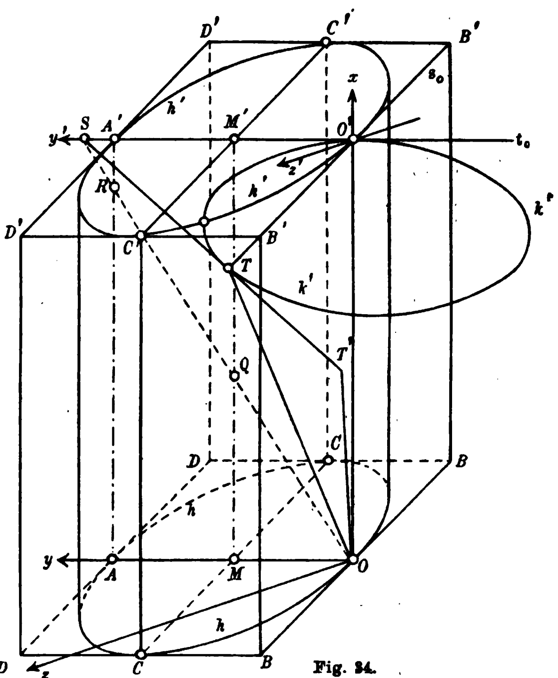


Fig. 34.

4. Bestimmtheit des rechtwinkligen Systems. Das System $Oxyz$, auf das sich die Darstellung (1)—(5) bezieht, ist ein *ganz bestimmtes.*

Sein Anfangspunkt O ist der einzige *Scheitelpunkt* $\lambda = 0$

der Kurve (§ 11, 2, I), seine x-Achse die durch ihn gehende *Erzeugende des* einzigen (§ 9, 4, I) *Zylinders* (4), der durch die Kurve geht, seine xy-Ebene:

(6) $$z = 0 \quad (OO'AA')$$

diejenige *Diametralebene* des Zylinders, die den *Scheitelpunkt* O mit der einzigen (§ 8, 12, I) *Asymptote* (AA' Fig. 34) verbindet.

Deshalb sind die *Gleichungen der Mittelpunktsachse* des Zylinders (MM' Fig. 34) und *der Asymptote* von der Form (§ 9, (11); § 8, (35) mit $t = 1$):

(7) $$y = \frac{b}{2}, \quad z = 0;$$

(8) $$y = b, \quad z = 0.$$

5. Weitere Scheitelelemente. Zugleich ist die x-Achse *gemeinsame* Erzeugende des elliptischen Zylinders (4) und des Scheitelkegels (5), und die xy-Ebene (6) die Tangentialebene Ot_0 des Scheitelkegels längs der x-Achse.

Der Tangentialebene des Zylinders längs der x-Achse (§ 11, (25)):

(9) $$cy - b'z = 0 \quad (Os_0,\ OO'BB')$$

ist parallel die *Asymptotenebene* (§ 7, (25)):

(10) $$cy - b'z - bc = 0 \quad (DD'),$$

die Tangentialebene des Zylinders längs der Asymptote (8). Die zu beiden Ebenen (9) und (10) parallele Ebene:

(11) $$cy - b'z - \tfrac{1}{2}bc = 0 \quad (CC')$$

ist daher die zu (6) konjugierte Diametralebene des Zylinders.

Die *Scheiteltangente* der Kurve (§ 11, (27)):

(12) $$x : y : z = a'' : b' : c \quad (OT)$$

ist diejenige Erzeugende des Scheitelkegels, die in der Tangentialebene (9) des Zylinders liegt.

Die *Scheitelschmiegungsebene*:

(13) $$c(bx - a'y) + (a'b' - a''b)z = 0 \quad (OTT')$$

ist nach § 11, (28) Tangentialebene des Scheitelkegels längs der Scheiteltangente.

6. Die beiden Durchmesser. Die Mittelpunktsachse (7) des Zylinders (4) (MM' Fig. 34) ist nach § 11, 9 *der einzige Achsendurchmesser* der Kurve.

Die Schnittlinie der beiden Tangentialebenen (6) und (13) des Kegels (5):

(14) $$x : y : z = a' : b : 0 \quad (OS)$$

ist nach § 11, 8 *der einzige Scheiteldurchmesser* der Kurve.

Die beiden Durchmesser MM' und OS schneiden sich im Punkte:

(15) $$x = \frac{a'}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = 0, \quad (Q),$$

der Scheiteldurchmesser OS und die Asymptote AA' im Punkte:

(16) $$x = a', \quad y = b, \quad z = 0 \quad (R).$$

7. Die vom Achsendurchmesser halbierten Sehnen. Nach § 11, (39) *halbiert der Achsendurchmesser* (7) *alle Sehnen der kub. Ellipse, deren Endpunkte λ und λ', durch die Bedingung*:

(17) $$\lambda\lambda' = -e^2$$

verbunden, in derselben Diametralebene des elliptischen Zylinders (4) *liegen.*

Die Koordinaten des Mittelpunktes einer solchen Sehne sind nach § 11, (40):

(18) $$x = \frac{a}{2}(\lambda + \lambda') + \frac{a'}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = 0.$$

Umgekehrt gehört daher zu jedem Punkte x des Durchmessers (7) eine aus den Angaben:

(19) $$\lambda + \lambda' = \frac{2x - a'}{a}, \quad \lambda\lambda' = -e^2$$

mittels einer quadratischen Gleichung bestimmte reelle Sehne $\lambda\lambda'$, die der Punkt halbiert.

8. Die Nebenscheitelpunkte. Zu den vom Achsendurchmesser halbierten Sehnen gehört die den Scheitelpunkt $\lambda = 0$ und den unendlich fernen Punkt $\lambda' = \infty$ verbindende x-Achse, ferner diejenige Sehne, welche die „*Nebenscheitelpunkte*“ N und N':

(20) $$\lambda = e \quad \text{und} \quad \lambda' = -e$$

verbindet und nach (18) den Punkt (15) als Mittelpunkt hat. Da für alle Punkte der Kurve (1) mit $t = 1$:

(21) $$cy - b'z = \frac{bc\lambda^2}{\lambda^2 + e^2},$$

so liegen die Nebenscheitelpunkte, für die $\lambda^2 = e^2$, mit dem Punkt $\lambda = \infty$ als dritten, in der Diametralebene (11) des elliptischen Zylinders. Ihre Tangenten sind, da nach (3) $p_{34} = 0$, parallel der Ebene (6).

9. Ort der halbierten Sehnen. Der *Ort der vom Achsendurchmesser halbierten Sehnen* ist nach § 11, (47) die Fläche 2. O.:

$$(22)\qquad 2ac^2y^2 + \{(ae^2 + a'')b^2 + (2ab' - a'b)b'\}z^2 \\ - (4ab' - a'b)cyz - b^2czx - abc^2yt + abb'czt = 0.$$

Sie ist, da in der Bezeichnung von § 9, (5): $A_{44} = -a_{22}a_{31}^2 \neq 0$ und nach § 9, (32) stets ein *einschaliges Hyperboloid* (II § 99, (31)).

10. Die vom Scheiteldurchmesser halbierten Sehnen. Nach § 11, 8 *halbiert der Scheiteldurchmesser* (14) *alle Sehnen der kub. Ellipse, deren Endpunkte* λ *und* λ' *durch die Bedingung*:

$$(23)\qquad \lambda + \lambda' = 0$$

verbunden sind, also alle Sehnen $\lambda, -\lambda$.

Da der Punkt λ der Kurve nach (1) durch die Ebene:

$$(24)\qquad (cy - b'z) - \lambda bz = 0$$

eines durch die x-Achse gelegten Ebenenbüschels gekennzeichnet ist, so *liegen die Endpunkte* λ *und* $-\lambda$ *der Sehne in zwei solchen Ebenen des Büschels* (24), *die zu den beiden Tangentialebenen* (9) *und* (6) *des Zylinders und Kegels längs der x-Achse harmonisch sind.*

Die Koordinaten des Mittelpunktes der Sehne $\lambda, -\lambda$ sind nach § 11, (37) mit $t = 1$:

$$(25)\qquad x = \frac{a'\lambda^2}{\lambda^2 + e^2},\quad y = \frac{b\lambda^2}{\lambda^2 + e^2},\quad z = 0.$$

Stellt man den Durchmesser (14) in der Form § 11, (32):

$$(26)\qquad x = a'\sigma,\quad y = b\sigma,\quad z = 0$$

dar, so sind die Endpunkte der Sehne, die einen gegebenen Punkt σ des Durchmessers trifft, nach § 11, (35):

$$(27)\qquad \lambda = e\sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}},\quad \lambda' = -e\sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Sie sind daher nur reell, wenn der Punkt σ mit $0 \leqq \sigma \leqq 1$ zwischen dem Scheitelpunkt O und dem Schnittpunkt (16) des Durchmessers (26) mit der Asymptote (8) liegt. Die diesen äußersten Werten entsprechenden Sehnen $\lambda, -\lambda$ sind die *Scheiteltangente* und die *Asymptote.*

Die Sehne $\lambda = e$, $\lambda' = -e$ *wird nach* (17) *und* (23) *sowohl vom Scheiteldurchmesser wie vom Achsendurchmesser halbiert,* und ihr Mittelpunkt ist der Punkt (15).

11. Ort der halbierten Sehnen. Der *Ort der vom Scheiteldurchmesser halbierten Sehnen* ist nach § 11, (44) das *hyperbolische Paraboloid:*

$$(28)\quad a'c^2y^2-(abe^2+2a'b'-a''b)cyz+(abe^2+a'b'-a''b)b'z^2+bb'czx-bc^2xy$$
$$+\,b^2c^2xt-a'bc^2yt+(a'b'-a''b)bczt=0\,.$$

Es ist *gleichseitig* in dem *besonderen* Falle, daß zwischen den Koeffizienten in (1) die Beziehung besteht (II § 100, (13)):

$$(29)\qquad (ae^2-a'')bb'+a'(b'^2+c^2)=0\,.$$

12. Die Achsenkegelschnitte. Der Achsenkegelschnitt λ der kub. Ellipse ist nach § 10, 5, I eine *Ellipse*, wenn:

$$(30)\qquad -e\sqrt{3}<\lambda<e\sqrt{3}\,,$$

eine *Hyperbel*, wenn λ außerhalb des Intervalles (30) liegt, eine *Parabel* in den beiden parallelen Schmiegungsebenen § 8, (32), die den Grenzen des Intervalles (30) entsprechen.

Von den beiden ausgezeichneten Achsenkegelschnitten $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ (§ 10, (4)):

$$(31)\qquad (a''u+b'v+cw)^2-3e^2s(a'u+bv+s)=0\,,$$
$$(32)\qquad (a'u+bv+s)^2-3au(a''u+b'v+cw)=0$$

ist daher der erste eine *Ellipse*, der zweite eine *Hyperbel*, jene in der *Scheitelschmiegungsebene*, diese in der *Asymptotenebene* gelegen.

Beide Ebenen schneiden sich in der Verbindungslinie r_0 der beiden Punkte:

$$(33)\qquad a''u+b'v+cw=0 \quad\text{und}\quad a'u+bv+s=0\,,$$

des unendlich fernen Punktes der Scheiteltangente (12) und des Schnittpunktes (16) des Scheiteldurchmessers mit der Asymptote.

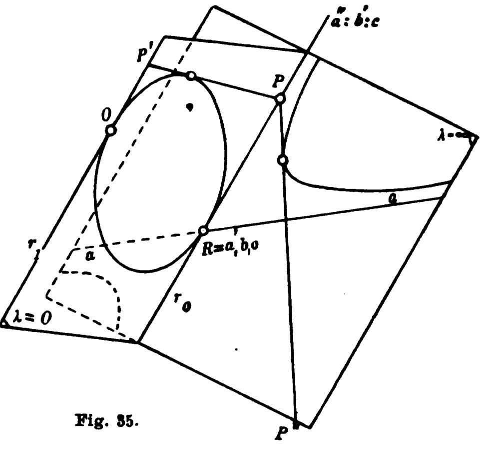


Fig. 35.

In der Tat liegt jeder der beiden Punkte (33) in jeder der beiden Ebenen (13) und (10) (Fig. 34 würde r_0 als die durch R gezogene Parallele zu OT erhalten).

Nach der Form ihrer Gleichung (II § 52, (7')) hat die Ellipse (31) in den Punkten $O=0,\ 0,\ 0,\ 1$ und $R=a',\ b,\ 0,\ 1$ parallele Tangenten von der Richtung $a'':b':c$ (r_1 und r_0 Fig. 35). Ebenso hat die Hyperbel (32) zwei vom Punkte $R=a',\ b,\ 0,\ 1$ ausgehende und in den unendlich fernen Punkten $a'',\ b',\ c,\ 0$ und $1,\ 0,\ 0,\ 0$ berührende Tangenten. Es ist also R der Mittelpunkt und sind die Gerade r_0

und die Asymptote a der kub. Ellipse die beiden Asymptoten der Hyperbel.

Wie die gemeinsamen Punkte der beiden Flächen (4) *und* (5), *mit Abzug der x-Achse, die Punkte* (1) *der kub. Ellipse sind, so sind die gemeinsamen Tangentialebenen der beiden Kegelschnitte* (31) *und* (32) ($PP'P''$ Fig. 35), *mit Abzug des Ebenenbüschels der Geraden* r_0, *die Schmiegungsebenen* (2).

Von dem Ebenenbüschel sind nur zwei Ebenen, die der Kegelschnitte (31) und (32) selbst, Schmiegungsebenen.

13. Das natürliche Koordinatensystem der kub. Ellipse. Für die kub. Ellipse ist das schiefwinklige System $O\xi\eta\zeta$ der Scheitelelemente § 12, 1 ein einziges ausgezeichnetes; wir bezeichnen es jetzt wiederum mit $Oxyz$.

Sein Anfangspunkt ist der Scheitelpunkt O, seine x-Achse die gemeinsame Erzeugende von elliptischem Zylinder und Scheitelkegel, seine y-Achse der Scheiteldurchmesser und seine z-Achse die Scheiteltangente.

In diesem System lauten nach § 12, (6); (7); (11) die Parameterdarstellungen der kub. Ellipse (mit $e = 1$):

$$(34) \qquad x = a\lambda^3, \quad y = b\lambda^2, \quad z = c\lambda, \quad t = \lambda^2 + 1;$$

$$(35) \qquad au = 1, \quad bv = \lambda(\lambda^2 - 3), \quad cw = 3\lambda^2, \quad s = -\lambda^3;$$

$$(36) \qquad p_{23} = bc\lambda^2, \quad p_{31} = -2ca\lambda^3, \quad p_{12} = ab\lambda^4,$$
$$p_{14} = a\lambda^2(\lambda^2 + 3), \quad p_{24} = 2b\lambda, \quad p_{34} = -c(\lambda^2 - 1).$$

14. Flächenbündel und Scharschar. Das Bündel aller durch die kub. Ellipse (34) gehenden Flächen ist mit den Parametern $\varrho : \sigma : \tau$ nach § 12, (16):

$$(37) \quad \varrho\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y}{b}t\right) - \sigma\left(\frac{y}{b}\frac{z}{c} + \frac{x}{a}\frac{y}{b} - \frac{x}{a}t\right) + \tau\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c}\frac{x}{a}\right) = 0;$$

die *Scharschar* aller die Ebenen (35) enthaltenden Flächen 2. Kl. nach § 12, (17):

$$(38) \quad \varrho(b^2v^2 - 3acwu + 2bvs + s^2) + \sigma(bcvw - 9aus + cws)$$
$$+ \tau(c^2w^2 - 3bvs - 3s^2) = 0.$$

Aus (37) geht mit $\varrho = \lambda^2$, $\sigma = \lambda$, $\tau = 1$ der Sehnenkegel λ und dann mit $\lambda = \infty$ und $\lambda = 0$ der *elliptische Zylinder* und *Scheitelkegel:*

$$(39) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y}{b} = 0, \qquad (40) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c}\frac{x}{a} = 0$$

hervor, dagegen mit $\varrho = 0$, $\sigma = 1$, $\tau = 0$ das *hyperbolische Paraboloid* (§ 12, 6):

$$(41) \qquad \frac{y}{b}\frac{z}{c} + \frac{x}{a}\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0,$$

auf dem die vom Scheiteldurchmesser halbierten Sehnen liegen ($t = 1$).

Ebenso folgen aus (38) die Achsenkegelschnitte $\lambda = \infty$ und $\lambda = 0$:

$$(42) \quad (bv + s)^2 - 3acwu = 0; \qquad (43) \quad c^2w^2 - 3(bv + s)s = 0$$

und das *hyperbolische Paraboloid* (§ 12, 6):

$$(44) \qquad bcvw - 9aus + cws = 0,$$

auf dem die Achsen liegen, in denen sich zwei Schmiegungsebenen λ und $-\lambda$ schneiden.

15. Konstruktion der kub. Ellipse. Mittels des elliptischen Zylinders (39) und des Kegels (40) und des durch die gemeinsame Erzeugende gelegten Ebenenbüschels:

$$(45) \qquad \frac{y}{b} - \lambda\frac{z}{c} = 0$$

kann die kub. Ellipse im Anschluß an ihr natürliches Koordinatensystem $Oxyz$ konstruiert werden.

Die Spitze des Kegels liegt im Anfangspunkt O. In der zur Ebene Oyz parallelen Ebene $O'y'z'$, die etwa die Gleichung $x = a$ habe, ist die Leitlinie des Zylinders (39) eine Ellipse, welche die z'-Achse als Tangente im Punkte O' und die y'-Achse als zu jener konjugierten Durchmesser (Fig. 36) hat. In derselben Ebene $O'y'z'$ ist die Leitlinie des Kegels eine Parabel ((40) mit $x = a$), welche die y'-Achse als Tangente im Punkte O' hat und die z'-Achse als zu jener konjugierten „Durchmesser" (Parallele zur Hauptachse). In Fig. 36 ist $Oxyz$ rechtwinklig angenommen und in schiefer Projektion dargestellt. Die Konstruktion würde bei schiefwinkligem $Oxyz$ dieselbe sein.

Die Schnittlinien der Ebenen λ und $-\lambda$ des Büschels (45) mit $O'y'z'$ schneiden nun die Ellipse in zwei Punkten H und H', die auf derselben Parallelen zur z'-Achse liegen (Fig. 36) und die Parabel in zwei Punkten K und K' die auf derselben Parallelen zur y'-Achse liegen (Fig. 36). Die durch H und H' parallel zur x-Achse gezogenen Erzeugenden des Zylinders werden von den Erzeugenden OK und OK' des Kegels in zwei Punkten P und P' der kub. Ellipse geschnitten, deren nicht homogene Koordinaten nach (34) die Form x, y, z

und $-x, y, -z$ haben. Die Sehne PP' wird von dem Scheiteldurchmesser Oy halbiert (ebenso die anderen Sehnen der Fig. 36, die das Paraboloid (41) bilden). N und N' (Fig. 36) sind die Nebenscheitel-

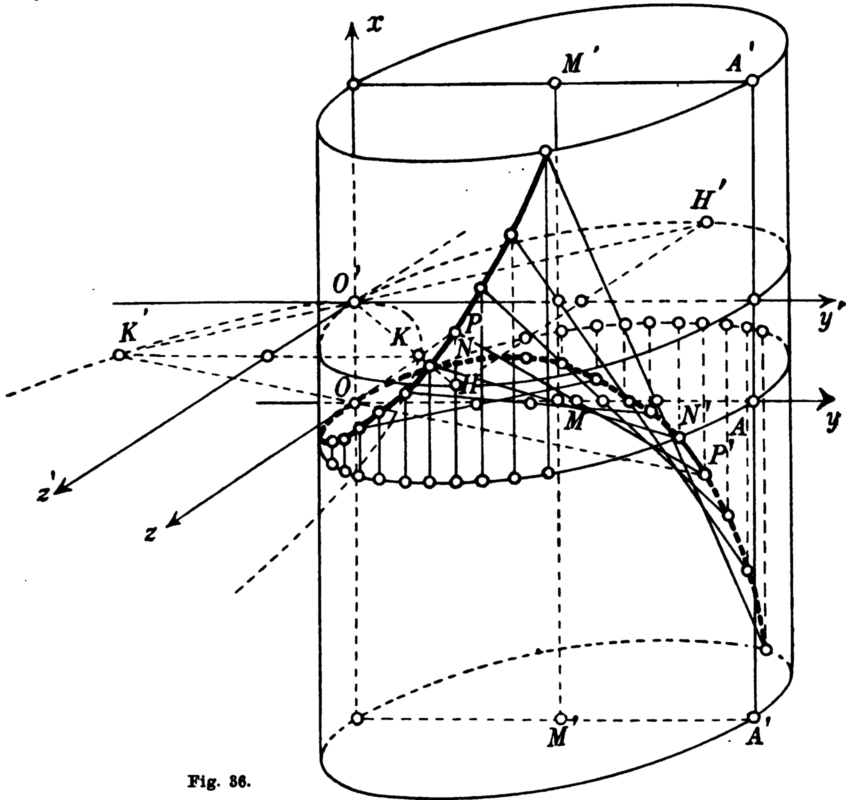


Fig. 36.

punkte (20), deren Sehne NN' sowohl vom Scheitel- als vom Achsendurchmesser MM' halbiert wird. Übrigens halbiert dieser die Sehnen, deren Endpunkte in diametralen Erzeugenden des Zylinders liegen. Dem Scheitelpunkt O liegt die Asymptote AA' diametral gegenüber.

16. Ebenen parallel zur Scheitelschmiegungsebene. Die der Scheitelschmiegungsebene, der Ebene $x = 0$ des schiefwinkligen Systems (§ 12, 1), parallelen Ebenen:

$$x - qt = 0 \tag{46}$$

mit einem Parameter q schneiden die Kurve (34) in drei durch die kubische Gleichung:

$$a\lambda^3 - q(\lambda^2 + 1) = 0 \tag{47}$$

bestimmten Punkten. Da deren Diskriminante $(27a^2 + 4q^2)q^2 > 0$, hat sie für $q \neq 0$ nur *eine* reelle Wurzel.

Die zur yz-Ebene des schiefwinkligen Systems parallelen Ebenen haben nur einen reellen Schnittpunkt; die yz-Ebene selbst drei zusammenfallende $\lambda = 0$.[1])

§ 18. Der kubische Kreis.

1. Begriff und Parameterdarstellung. Diejenige kub. Ellipse, von deren unendlich fernem Dreieck $E_1E_2E_3$ die beiden imaginären Ecken E_2 und E_3 *Punkte* und die beiden imaginären Seiten E_1E_2 und E_1E_3 *Tangenten des Kugelkreises* sind, wurde in § 16, **6** als *kub. Kreis* bezeichnet. Sie geht aus den allgemeinen Gleichungen § 17, (1) unter den Bedingungen § 16, (25) hervor, wobei auch noch $e = 1$ und (§ 16, **6**, III) $\varepsilon = 1$ genommen werden kann, also:

$$a' = 0, \quad a'' = a, \quad b' = 0, \quad c = b. \tag{1}$$

Der kub. Kreis hat in bezug auf das rechtwinklige System $Oxyz$ des Scheitels (§ 17, **4**) *die folgende Parameterdarstellung seiner Punkte, Schmiegungsebenen und Tangenten:*

$$x = a\lambda(\lambda^2 + 1), \quad y = b\lambda^2, \quad z = b\lambda, \quad t = \lambda^2 + 1; \tag{2}$$

$$u = b, \quad v = a\lambda(\lambda^2 - 3), \quad w = a(3\lambda^2 - 1), \quad s = -ab\lambda^3, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} p_{23} &= b^2\lambda^2, \quad p_{31} = -2ab\lambda^3, \quad p_{12} = ab\lambda^2(\lambda^2 - 1) \\ p_{14} &= a(\lambda^2 + 1)^2, \quad p_{24} = 2b\lambda, \quad p_{34} = -b(\lambda^2 - 1), \end{aligned} \tag{4}$$

wo jedesmal ein Proportionalitätsfaktor hinzu zu denken ist.

2. Durchschnitt von Zylinder und Kegel. Der kub. Kreis ist der Durchschnitt des *Rotationszylinders* und des *elliptischen Kegels.*[2])

$$y^2 + z^2 - byt = 0; \tag{5}$$

$$a(y^2 + z^2) - bzx = 0, \tag{6}$$

die außerdem die x-Achse gemein haben.

Der Zylinder (5) ist die *einzige* Rotationsfläche 2. O., die durch die Kurve geht (§ 16, **6**, II).

3. Der Schraubensinn. In nicht homogener Schreibweise werden die Gleichungen (2):

$$x = a\lambda, \quad y = \frac{b\lambda^2}{\lambda^2 + 1}, \quad z = \frac{b\lambda}{\lambda^2 + 1}, \tag{7}$$

---

1) Die Auf- und Abschwankung der kub. *Ellipse* in den *auf Gipszylindern gezeichneten Raumkurven 3. O. von E. Lange* (M. Schilling, Katalog 1911, S. 132) fällt daher fort, wenn, wie hier in Fig. 36, nicht die zur Zylinderachse senkrechten, sondern die der Scheitelschmiegungsebene parallelen Ebenen ausgezeichnet werden; vgl. ferner für alle vier Arten des kub. Kegelschnittes die Modelle von W. Ludwig (M. Schilling, Katalog 1911, S. 132) und von H. Wiener (B. G. Teubner, Verzeichn. math. Modelle 1912, S. 29).

2) C. Hoffmann, Unterrichtsbl. f. Math. 16 (1910), S. 34.

oder, wenn:

$$\lambda = 1 : \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} \tag{8}$$

gesetzt wird:

$$x = a\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}, \quad y - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}\cos\varphi, \quad z = \frac{b}{2}\sin\varphi, \tag{9}$$

wo φ den Winkel der laufenden Diametralebene des Zylinders (5) gegen die xy-Ebene bedeutet (Fig. 37).

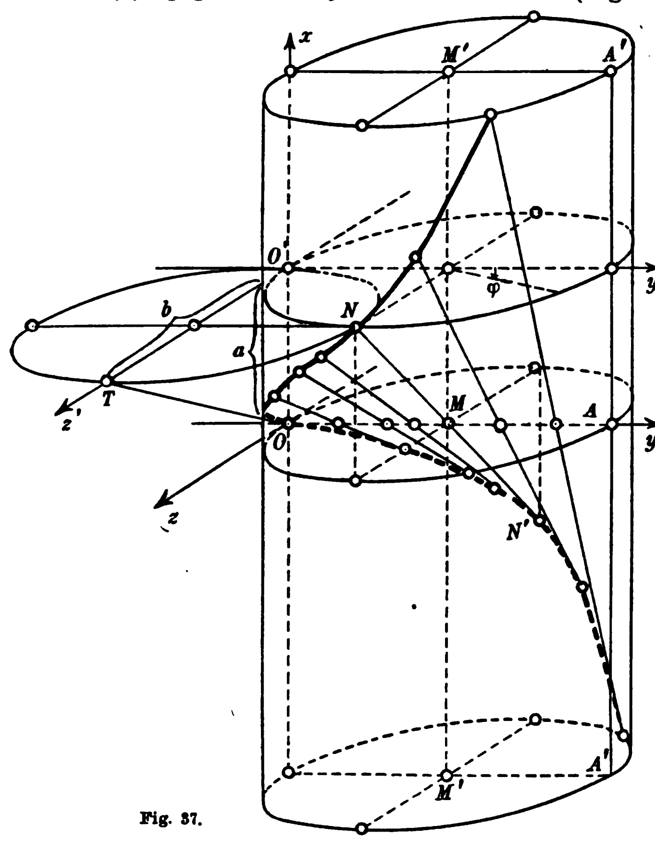


Fig. 37.

Während nun φ, dem positiven Drehungssinn der $y'z'$-Ebene (I § 32, 8) folgend, von 0 über π bis 2π zunimmt, bewegt sich x bei positivem a von $+\infty$ über 0 bis $-\infty$, bei negativem a umgekehrt. Es folgt also in Übereinstimmung mit § 8, (20):

Der kub. Kreis (2) *hat, bei positiv orientiertem System $Oxyz$, positiven oder negativen Schraubensinn* (I § 32, 7), *je nachdem $a < 0$ oder $a > 0$* (bei Fig. 37 ist die Kurve dementsprechend bei negativ orientiertem System $Oxyz$ und positivem $a = OO'$ positiv geschraubt)[1]).

4. Die Scheitelelemente. Der Punkt O mit $\lambda = 0$ ist der *Scheitelpunkt* des kub. Kreises. Er liegt auf dem Rotationszylinder (5) der *Asymptote* (§ 17, (8)):

$$y = b, \quad z = 0 \quad (AA') \tag{10}$$

(Fig. 37) diametral gegenüber[2]). Die *Scheiteltangente:*

---

1) F. Schuh, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), S. 380.

2) A. Schoenflies, Geom. d. Bew., Leipzig 1886, S. 118; R. Sturm, Geom. Verwandtsch. 2 (1908), S. 181.

(11) $$bx - az = 0, \quad y = 0 \quad (OT)$$

ist die Berührungslinie der *Scheitelschmiegungsebene:*

(12) $$bx - az = 0$$

mit dem *Scheitelkegel* (6) (§ 17, **5**).

Der *Scheiteldurchmesser:*

(13) $$z = 0, \quad x = 0,$$

fällt in die y-Achse, der *Achsendurchmesser:*

(14) $$y = \frac{b}{2}, \quad z = 0 \quad (MM')$$

ist die Mittelpunktsachse des Zylinders. Jener halbiert alle Sehnen $\lambda, -\lambda$ (Fig. 37), dieser alle Sehnen $\lambda, -1:\lambda$.

Den Werten $\lambda = 1, -1$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ in } (8)\right)$ entsprechen nach (7) die beiden *Nebenscheitelpunkte* N, N':

(15) $$x = a, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{b}{2}; \quad x = -a, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = -\frac{b}{2},$$

$(t = 1)$, deren Sehne sowohl vom Scheitel- als vom Achsendurchmesser halbiert wird (in M Fig. 37).

5. Kreisschnitte senkrecht zur Asymptote. Die Ebene $x = a$ ($O'y'z'$ Fig. 37) schneidet den *Zylinder* (5) und den *Kegel* (6) in *den beiden Kreisen* vom gleichen Durchmesser b:

(16) $$y^2 + z^2 - by = 0, \quad y^2 + z^2 - bz = 0,$$

die sich außer im Punkte O' der x-Achse in dem ersten *Nebenscheitelpunkt* (15) schneiden und mit O zusammen ($OO' = a$) zur *Bestimmung des kub. Kreises* dienen können.

Für die Schnittpunkte der Kurve mit irgend einer zur x-Achse senkrechten Ebene mit dem Parameter m:

(17) $$x - mt = 0$$

ergibt sich aus (2):

(18) $$(a\lambda - m)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Der kub. Kreis wird also von jeder zur Zylinderachse senkrechten Ebene in einem einzigen reellen Punkte geschnitten.

Die beiden imaginären Schnittpunkte $\lambda^2 + 1 = 0$, für die nach (2) $t = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, sind die imaginären Kreispunkte der Ebene (17)[1].

1) F. Schuh, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), S. 381.

Die Kreisschnittebenen des Zylinders (5) *bilden auch die eine Schar von Kreisschnittebenen des elliptischen Kegels* (6).

6. Flächenbündel des kub. Kreises. Das Bündel der durch den kub. Kreis gehenden Flächen 2. O. ist nach § 9, (25); (3):

$$(19)\qquad \varrho f + \sigma g + \tau h = 0,$$

mit:

$$(20)\quad f = a(y^2 + z^2 - byt),\ g = -b(xy - bxt + azt),\ h = a(y^2 + z^2) - bzx$$

oder geordnet:

$$(21)\quad (\varrho + \tau)a(y^2 + z^2) - \tau bzx - \sigma bxy + \sigma b^2 xt - \varrho abyt - \sigma abzt = 0.$$

Die Fläche $g = 0$ ist nach § 9, **16** das hyperbolische Paraboloid der vom Scheiteldurchmesser halbierten Sehnen (s. 8, II).

7. Kreisschnittebenen der Bündelflächen. Die vier Schnittpunkte der unendlich fernen Kurve der Fläche (21) und des Kugelkreises:

$$(22)\quad (\varrho + \tau)a(y^2 + z^2) - \tau bzx - \sigma bxy = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 0,\ t = 0$$

liegen auf dem durch Elimination von $y^2 + z^2$ hervorgehenden, reellen Geradenpaar:

$$(23)\qquad x\{(\varrho + \tau)ax + \sigma by + \tau bz\} = 0,\quad t = 0.$$

Durch die eine oder andere Gerade des Paares gehen die Kreisschnittebenen der Fläche (21):

Für jede Fläche des Bündels ist die eine Schar von Kreisschnittebenen zur Achse des Rotationszylinders senkrecht.[1])

Der Kreis, in dem die Ebene (17) die Fläche (21) schneidet, zerfällt in eine endliche und eine unendlich ferne Gerade, wenn $\varrho + \tau = 0$.

Die Fläche (21) *ist ein hyperbolisches Paraboloid, wenn:*

$$(24)\qquad \varrho + \tau = 0\quad (\varrho\tau - \sigma^2 \neq 0,\ \S\ 9,\ (32)).$$

In der Tat ist für (21) auch die Unterdeterminante, deren Verschwinden ein Paraboloid bedingt (II § 99, (31)):

$$(25)\qquad A_{44} = -\tfrac{1}{4}ab^2(\varrho + \tau)(\sigma^2 + \tau^2).$$

8. Orthogonale Flächen. In der unendlich fernen Ebene hat die eine Seite $x = 0$ des vollständigen Vierecks der Schnittpunkte (22) in bezug auf den Kugelkreis den Pol $x = 1,\ y = 0,\ z = 0$. Da dieser auf der ersten Kurve (22) liegt, folgt (II § 100, **7**):

I. *Alle Flächen des Bündels* (21) *sind orthogonal.*[2])

1) A. Schoenflies, Geom. d. Bew., Leipzig 1886, S. 117.

2) A. Schoenflies, ebd. S. 116; Th. Reye, Geom. d. L. 2 (1892), S. 176.

In der Tat ist neben (25):

$$(26)\qquad A'_{44} = a^2(\varrho+\tau)^2 - \tfrac{1}{4}b^2(\sigma^2+\tau^2),\quad A''_{44} = 2a(\varrho+\tau)$$

und damit die Bedingung:

$$(27)\qquad A''^{3}_{44} - 4A'_{44}A''_{44} + 8A_{44} = 0$$

der orthogonalen Flächen (II § 100, (29)) erfüllt.

II. Die *hyperbolischen Paraboloide* $\varrho+\tau=0$ sind sämtlich *gleichseitig*, da $A''_{44}=0$.

9. Die Scharschar der Flächen 2. Kl. Die Scharschar der Flächen 2. Kl., welche die Schmiegungsebenen (3) als Tangentialebenen haben, ist nach § 10, (43); (3):

$$(28)\qquad \varrho F + \sigma G + \tau H = 0,$$

wo:

$$(29)\qquad \begin{aligned} F &= -3a^2u^2 + b^2v^2 - 3abwu + 2bvs + s^2,\\ G &= b^2vw + abuv - 8aus + cws,\\ H &= a^2u^2 + b^2w^2 + 2abwu - 3bvs - 3s^2. \end{aligned}$$

10. Der Mittelpunktskegelschnitt. Der Mittelpunktskegelschnitt hat nach § 10, (20) die Parameterdarstellung:

$$(30)\qquad x = -8a\lambda,\quad y = b(2\lambda^2-3),\quad z = b\lambda,\quad t = 2(\lambda^2-3)$$

und liegt in der Ebene:

$$(31)\qquad bx + 8az = 0.$$

Er ist eine Hyperbel, die nach § 10, (38) gleichseitig wird für:

$$(32)\qquad b^2 = 32a^2.$$

11. Die Sehnen λ_0, λ und $-\lambda_0$, λ. *Die Sehne, welche die Punkte λ_0 und λ der Kurve* (2) *verbindet,* hat, mit Rücksicht auf (1), nach § 8, (2) die Gleichungen:

$$(33)\quad bx - a(\lambda_0+\lambda)y + a(\lambda_0\lambda-1)z = 0,\quad (\lambda_0\lambda-1)y + (\lambda_0+\lambda)z - b\lambda_0\lambda = 0$$

oder auch, wenn x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Punktes λ_0 sind, der den Gleichungen (33) genügt:

$$\begin{aligned} &b(x-x_0) - a(\lambda_0+\lambda)(y-y_0) + a(\lambda_0\lambda-1)(z-z_0) = 0,\\ &(\lambda_0\lambda-1)(y-y_0) + (\lambda_0+\lambda)(z-z_0) = 0 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} b(x-x_0) - a\lambda\{(y-y_0) - \lambda_0(z-z_0)\} - a\{\lambda_0(y-y_0) + (z-z_0)\} &= 0,\\ \{(y-y_0) - \lambda_0(z-z_0)\} - \lambda\{\lambda_0(y-y_0) + (z-z_0)\} &= 0 \end{aligned}$$

oder endlich:

$$(34)\quad x - x_0 : \frac{(y-y_0) - \lambda_0(z-z_0)}{w_0} : \frac{\lambda_0(y-y_0) + (z-z_0)}{w_0} = \frac{a w_0}{b}(\lambda^2+1) : \lambda : 1$$

wo der beigefügte Faktor w_0 die Bedeutung haben soll:

(35) $$w_0 = \sqrt{1+\lambda_0^2}.$$

Ebenso hat *die Sehne, welche die Punkte* $-\lambda_0$ *und* λ *verbindet,* die Gleichungen:

(36) $$x - x_0' : \frac{(y-y_0') + \lambda_0 (z - z_0')}{w_0} : \frac{-\lambda_0 (y-y_0') + (z-z_0')}{w_0} = \frac{a w_0}{b}(\lambda^2+1):\lambda:1,$$

wenn $x_0' = -x_0$, $y_0' = y_0$, $z_0' = -z_0$ der Punkt $-\lambda_0$ ist.

12. Kongruente Bündel. Durch die Transformationen (I § 14, (10)):

(37) $$\begin{cases} \xi = x - x_0,\ \eta = (y-y_0)\cos(-\varphi_0) + (z-z_0)\sin(-\varphi_0), \\ \zeta = -(y-y_0)\sin(-\varphi_0) + (z-z_0)\cos(-\varphi_0), \\ \xi' = x - x_0',\ \eta' = (y-y_0')\cos\varphi_0 + (z-z_0')\sin\varphi_0, \\ \zeta' = -(y-y_0')\sin\varphi_0 + (z-z_0')\cos\varphi_0 \end{cases}$$

werden nun neben $Oxyz$ zwei neue Systeme $P_0\xi\eta\zeta$ und $P_0'\xi'\eta'\zeta'$ eingeführt, deren Anfangspunkte P_0 und P_0' die Punkte λ_0 und $-\lambda_0$ der Kurve (2) sind, deren Achsen ξ und ξ' der Achse x parallel und deren Achsen η, ζ und η', ζ' gegen die Achsen y, z um die Winkel $-\varphi_0$ und φ_0 gedreht sind. Nimmt man hierbei mit Rücksicht auf (35):

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{w_0}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{\lambda_0}{w_0},$$

so werden die Gleichungen der Sehnen (34) und (36) in den neuen Systemen:

(38) $$\xi:\eta:\zeta = \frac{a w_0}{b}(\lambda^2+1):\lambda:1; \quad \xi':\eta':\zeta' = \frac{a w_0}{b}(\lambda^2+1):\lambda:1.$$

Die Sehnen λ_0, λ und $-\lambda_0$, λ haben daher, bei festem λ_0 und wechselndem λ, in den beiden Systemen $P_0\xi\eta\zeta$ und $P_0'\xi'\eta'\zeta'$ jedesmal dieselben Richtungskosinus oder:

Die Sehnen, welche zwei feste Punkte λ_0 *und* $-\lambda_0$ *des kub. Kreises mit dem laufenden Punkte* λ *verbinden, gehören kongruenten Bündeln an*[1]).

§ 19. Überführung der kub. Hyperbel vom Scheitel- zum natürlichen Koordinatensystem.

1. Die Parameterdarstellung im Scheitelsystem. Die Darstellungen der kub. Ellipse in § 17, 2; 3 gelten, sofern $-e^2$ für e^2 gesetzt wird, auch für die *kub. Hyperbel.* Insbesondere ist für deren *Punkte* und *Schmiegungsebenen*:

1) H. Helmholtz, Handbuch der physiolog. Optik, 3. Aufl. (1910), S. 386 (*Horopterkurve*); A. Schoenflies, Geom. d. Bew., Leipzig 1886, S. 119; F. Schur,



$$(1)\begin{cases} x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda, \\ y = \qquad b\lambda^2 + b'\lambda, \\ z = \qquad\qquad c\lambda, \\ t = \lambda^2 - e^2; \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} u = bce^2, \\ v = -(a\lambda^3 + 3ae^2\lambda + a'e^2)c, \\ w = a\lambda(b'\lambda^2 + 3be^2\lambda + 3b'e^2) \\ \quad + (a'b' - a''b)e^2, \\ s = abc\lambda^3. \end{cases}$$

Während aber für die kub. Ellipse das hierbei gewählte Koordinatensystem ein einziges, an den einzigen Scheitelpunkt sich anlehnendes ist, gilt dies bei der kub. Hyperbel nicht mehr.

Um auch hier ein *einzigartiges* System zu gewinnen, wird man als *Achsenrichtungen* naturgemäß die Richtungen nach den drei unendlich fernen Punkten der kub. Hyperbel wählen.[1]) Es handelt sich dann noch um die Wahl eines geeigneten Anfangspunktes.

2. Der Mittelpunkt der kub. Hyperbel. Die kub. Hyperbel hat nach § 11, (7) *drei Scheitelpunkte*:

$$(3)\qquad \lambda = 0, \quad \lambda = -3e, \quad \lambda = 3e$$

und in ihnen drei *Scheitelschmiegungsebenen*, die nach (2) und (3) die Koordinaten haben:

$$u = bc, \quad v = -a'c, \quad w = a'b' - a''b, \quad s = 0;$$

$$u = bc, \; v = -(36a\varepsilon e + a')c, \; w = 9a\varepsilon e(3b\varepsilon e + 4b') + (a'b' - a''b), \\ s = 27abc\varepsilon e$$

mit $\varepsilon = -1$ und $\varepsilon = 1$. Ihre Gleichungen werden daher:

$$(4)\qquad bcx - a'cy + (a'b' - a''b)z = 0,$$

$$\{bcx - a'cy + (a'b' - a''b)z\} + 27abe^2z - 9a\varepsilon e(4cy - 4b'z - 3bc) = 0$$

Der Schnittpunkt der drei Ebenen (4) genügt den Gleichungen:

$$bcx - a'cy + (a'b' - a''b)z = 0, \quad z = 0, \quad 4cy - 4b'z - 3bc = 0$$

und hat daher die Koordinaten:

$$(5)\qquad x_0 = \frac{3}{4}a', \quad y_0 = \frac{3}{4}b, \quad z_0 = 0.$$

Der Punkt (5), *der Schnittpunkt der drei Scheitelschmiegungsebenen der kub. Hyperbel soll ihr Mittelpunkt heißen.*[2])

Dorpater Sitz.-Ber. 1889, S. 162; F. Schuh, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), S. 375; R. Sturm, Geom. Verwandtschaften 2 (1908), S. 180; Katalog math. *Modelle* v. M. Schilling in Leipzig (1911), S. 74; 133.

1) A. Bioche, Edinb. M. S. Proc. 13 (1895), S. 146.

2) L. Geisenheimer, Zeitschr. Math. Phys. 27 (1882), S. 322.

3. Die Richtungskosinus der neuen Achsen. Die Richtungen nach den drei unendlich fernen Punkten § 14, (2) der kub. Hyperbel haben die Kosinus:

$$(6)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1, & \beta_1 = 0, & \gamma_1 = 0; \\ \alpha_2 = \dfrac{ae^2 + a'e + a''}{p}, & \beta_2 = \dfrac{be + b'}{p}, & \gamma_2 = \dfrac{e}{p}; \\ \alpha_3 = \dfrac{ae^2 - a'e + a''}{q}, & \beta_3 = \dfrac{-be + b'}{q}, & \gamma_3 = \dfrac{c}{q}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(7)\qquad \begin{aligned} p^2 &= (ae^2 + a'e + a'')^2 + (be + b')^2 + c^2, \\ q^2 &= (ae^2 - a'e + a'')^2 + (-be + b')^2 + c^2. \end{aligned}$$

Die Determinante der neuen Richtungskosinus ist:

$$(8)\qquad \varDelta = \frac{2bce}{pq},$$

und für ihre durch $\varDelta$ selbst geteilten Unterdeterminanten ergibt sich, wie § 14, (3):

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{A_1}{\varDelta} = 1, & \dfrac{B_1}{\varDelta} = -\dfrac{a'}{b'}, & \dfrac{\Gamma_1}{\varDelta} = -\dfrac{abe^2 - a'b' + a''b}{bc}; \\ \dfrac{A_2}{\varDelta} = 0, & \dfrac{B_2}{\varDelta} = \dfrac{p}{2be}, & \dfrac{\Gamma_2}{\varDelta} = \dfrac{(be - b')p}{2bce}; \\ \dfrac{A_3}{\varDelta} = 0, & \dfrac{B_3}{\varDelta} = -\dfrac{q}{2be}, & \dfrac{\Gamma_3}{\varDelta} = \dfrac{(be + b')q}{2bce}. \end{cases}$$

4. Die Übergangsformeln. Wir führen nun *ein schiefwinkliges System $\Omega\xi\eta\zeta$ ein, dessen Anfangspunkt Ω der Mittelpunkt* (5) *ist und dessen Achsen ξ, η, ζ* die Richtungen (6) nach den unendlich fernen Punkten haben oder, was dasselbe ist, *den drei Asymptoten* (§ 8, **12**, II) *der kub. Hyperbel parallel laufen.* Wir nennen es *das natürliche System der kub. Hyperbel.*

Sind ξ, η, ζ, τ und u', v', w', s' die neuen Punkt- und Ebenenkoordinaten, so gelten mit (5), (6), (9) die Formeln (I § 37, (13); (16)):

$$(10)\qquad \begin{cases} x = x_0\tau + \xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta, \\ y = y_0\tau \qquad + \beta_2\eta + \beta_3\zeta, \\ z = \qquad\qquad \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta, \\ t = \tau; \end{cases} \qquad (11)\qquad \begin{cases} \xi = x + \dfrac{B_1}{\varDelta}y + \dfrac{\Gamma_1}{\varDelta}z, \\ \eta = \eta_0 t + \dfrac{B_2}{\varDelta}y + \dfrac{\Gamma_2}{\varDelta}z, \\ \zeta = \zeta_0 t + \dfrac{B_3}{\varDelta}y + \dfrac{\Gamma_3}{\varDelta}z, \\ \tau = t, \end{cases}$$

wo (I § 37, (15)):

$$(11')\qquad \xi_0 = 0, \quad \eta_0 = -\frac{3p}{8e}, \quad \zeta_0 = \frac{3q}{8e}$$

die Koordinaten des alten Anfangspunktes O im neuen System sind. Ferner aber ist (I § 45, **10**):

$$(12)\quad \begin{cases} u = u', \\ v = \frac{B_1}{\Delta} u' + \frac{B_2}{\Delta} v' + \frac{B_3}{\Delta} w', \\ w = \frac{\Gamma_1}{\Delta} u' + \frac{\Gamma_2}{\Delta} v' + \frac{\Gamma_3}{\Delta} w', \\ s = \eta_0 v' + \zeta_0 w' + s'; \end{cases} \qquad (13) \begin{cases} u' = u, \\ v' = \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w, \\ w' = \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w, \\ s' = x_0 u + y_0 v + s. \end{cases}$$

5. Parameterdarstellung der Punkte und Schmiegungsebenen. Setzt man nun in (11) und (13) die Werte (1) und (2) ein, so erhält man nach einfacher Zusammenfassung:

$$(14)\quad \begin{cases} \xi = a\lambda(\lambda + e)(\lambda - e), \\ \eta = \frac{p}{8e}(\lambda + e)(\lambda + 3e), \\ \zeta = -\frac{q}{8e}(\lambda - e)(\lambda - 3e), \\ \tau = (\lambda + e)(\lambda - e); \end{cases} \qquad (15) \begin{cases} u' = -e^2, \\ v' = \frac{ae}{p}(\lambda - e)^3, \\ w' = -\frac{ae}{q}(\lambda + e)^3, \\ s' = -\frac{1}{4}a\lambda(\lambda + 3e)(\lambda - 3e); \end{cases}$$

Dividiert man hier alle rechten Seiten mit e^2 und bezeichnet alsdann neuerdings:

$$(16)\ \frac{\lambda}{e},\ ae,\ -\frac{p}{8e},\ -\frac{q}{8e};\ \xi,\eta,\zeta,\tau;\ u',v',w',s' \text{ mit } \lambda,a,b,c;\ x,y,z,t;\ u,v,w,s,$$

so ergibt sich folgende *Parameterdarstellung der Punkte und Ebenen der kub. Hyperbel im neuen System:*

$$(17)\quad \begin{cases} x = a\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1), \\ y = -b(\lambda + 1)(\lambda + 3), \\ z = c(\lambda - 1)(\lambda - 3), \\ t = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{cases} \qquad (18) \begin{cases} u = \frac{8}{a}, \\ v = \frac{1}{b}(\lambda - 1)^3, \\ w = -\frac{1}{c}(\lambda + 1)^3, \\ s = 2\lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3). \end{cases}$$

6. Die Gleichungen der Sehne. Die *Gleichungen der Sehne* $\lambda_1 \lambda_2$ in § 8, (2) werden für die kub. Hyperbel:

$$(19)\quad \begin{cases} b(cx - a''z) - \{a(\lambda_1 + \lambda_2) + a'\}(cy - b'z) + ab\lambda_1\lambda_2 z = 0, \\ be^2(\lambda_1 + \lambda_2)z - (\lambda_1\lambda_2 + e^2)(cy - b'z) + bc\lambda_1\lambda_2 t = 0. \end{cases}$$

Infolge der Substitution (10) und den daraus abgeleiteten Beziehungen:

$$(20)\quad\begin{cases} bx - a'y = b\xi + (abe^2 - a'b' + a''b)\left(\frac{\eta}{p} + \frac{\zeta}{q}\right), \\ cy - b'z = bc\left\{e\left(\frac{\eta}{p} - \frac{\zeta}{q}\right) + \frac{3}{4}\tau\right\}, \\ cx - a''z = c\left\{\xi + ae^2\left(\frac{\eta}{p} + \frac{\zeta}{q}\right) + a'e\left(\frac{\eta}{p} - \frac{\zeta}{q}\right) + \frac{3}{4}a'\tau\right\} \end{cases}$$

nehmen die Gleichungen (19) die Form an:

$$(21)\begin{cases} \frac{\xi}{ae} + e\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{e^2} - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{e} + 1\right)\frac{\eta}{p} + e\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{e^2} + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{e} + 1\right)\frac{\zeta}{q} - \frac{3}{4}\frac{\lambda_1+\lambda_2}{e}\tau = 0, \\ -e\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{e^2} - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{e} + 1\right)\frac{\eta}{p} + e\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{e^2} + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{e} + 1\right)\frac{\zeta}{q} + \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{e^2} - 3\right)\tau = 0. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich dann *in der neuen Bezeichnung* (16):

$$(22)\begin{cases} 8\frac{x}{a} - (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)\frac{y}{b} - (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)\frac{z}{c} - 6(\lambda_1 + \lambda_2)t = 0, \\ (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)\frac{y}{b} - (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)\frac{z}{c} + 2(\lambda_1\lambda_2 - 3)t = 0, \end{cases}$$

und mit Elimination von y oder z:

$$(23)\begin{cases} 4\frac{x}{a} - (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)\frac{z}{c} + (\lambda_1\lambda_2 - 3(\lambda_1 + \lambda_2) - 3)t = 0, \\ -4\frac{x}{a} + (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)\frac{y}{b} + (\lambda_1\lambda_2 + 3(\lambda_1 + \lambda_2) - 3)t = 0. \end{cases}$$

7. Die Gleichungen der Achse. Die *Gleichungen der Achse* $\lambda_1 \times \lambda_2$ sind nach § 8, (4):

$$(24)\begin{cases} 3a\lambda_1\lambda_2 u + (a'u + bv + s)(\lambda_1 + \lambda_2) + (a''u + b'v + cw) = 0, \\ (a'u + bv + s)\lambda_1\lambda_2 + (a''u + b'v + cw)(\lambda_1 + \lambda_2) - 3e^2 s = 0. \end{cases}$$

Infolge der Substitution (12) und den daraus folgenden Beziehungen:

$$(25)\quad a'u + bv + s = \frac{pv' - qw'}{8e} + s',\ a''u + b'v + cw = -ae^2u' + \frac{pv' + qw'}{2}$$

nehmen die Gleichungen (24) die Form an:

$$(26)\begin{cases} ae\left(3\frac{\lambda_1\lambda_2}{e^2} - 1\right)u' + \frac{p}{8e}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{e} + 4\right)v' - \frac{q}{8e}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{e} - 4\right)w' \\ \qquad + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{e}s' = 0, \\ -ae\frac{\lambda_1+\lambda_2}{e}u' + \frac{p}{8e}\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{e^2} + 4\frac{\lambda_1+\lambda_2}{e} + 9\right)v' \\ \qquad - \frac{q}{8e}\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{e^2} - 4\frac{\lambda_1+\lambda_2}{e} + 9\right) + \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{e^2} - 3\right)s' = 0, \end{cases}$$

und endlich *in der neuen Bezeichnung* (16):

$$(27)\begin{cases}(3\lambda_1\lambda_2-1)au-(\lambda_1+\lambda_2+4)bv+(\lambda_1+\lambda_2-4)cw+(\lambda_1+\lambda_2)s=0,\\(\lambda_1+\lambda_2)au+(\lambda_1\lambda_2+4(\lambda_1+\lambda_2)+9)bv\\\qquad-(\lambda_1\lambda_2-4(\lambda_1+\lambda_2)+9)cw-(\lambda_1\lambda_2-3)s.\end{cases}$$

8. Die Gleichungen der Tangente. Aus (23) und (27) folgen die *Gleichungen der Tangente des Punktes* λ in Punkt- und Ebenenkoordinaten:

$$(28)\qquad\begin{cases}-4\dfrac{x}{a}+(\lambda-1)^2\dfrac{y}{b}+(\lambda^2+6\lambda-3)t=0,\\[2ex]4\dfrac{x}{a}-(\lambda+1)^2\dfrac{z}{c}+(\lambda^2-6\lambda-3)t=0,\end{cases}$$

$$(29)\qquad\begin{cases}(3\lambda^2-1)au-2(\lambda+2)bv+2(\lambda-2)cw+2\lambda s=0,\\2\lambda au+(\lambda^2+8\lambda+9)bv-(\lambda^2-8\lambda+9)cw-(\lambda^2-3)s=0\end{cases}$$

und daraus die *Parameterdarstellung der Strahlenkoordinaten der Tangente:*

$$(30)\qquad\begin{cases}p_{23}=8bc(\lambda^2-3),\quad p_{31}=-ca(\lambda-1)^2(\lambda^2-6\lambda-3),\\p_{12}=-ab(\lambda+1)^2(\lambda^2+6\lambda-3),\quad p_{14}=a(\lambda^2-1)^2,\\p_{24}=4b(\lambda+1)^2,\quad p_{34}=4c(\lambda-1)^2.\end{cases}$$

9. Sehnenkegel und Achsenkegelschnitt. Durch Elimination von λ_2 aus den beiden Gleichungen (23) folgt, indem nachträglich λ für λ_1 gesetzt wird:

Der Sehnenkegel des Punktes λ *der kub. Hyperbel* (17) *hat die Gleichung:*

$$(31)\qquad\begin{cases}(\lambda^2-1)\dfrac{y}{b}\dfrac{z}{c}+2(\lambda+1)\dfrac{z}{c}\dfrac{x}{a}-2(\lambda-1)\dfrac{x}{a}\dfrac{y}{b}-4\lambda\dfrac{x}{a}t\\[2ex]+(\lambda-1)(\lambda+3)\dfrac{y}{b}t-(\lambda+1)(\lambda-3)\dfrac{z}{c}t+3(\lambda^2+3)t^2=0.\end{cases}$$

Ebenso folgt im Anschluß an (27):

Der Achsenkegelschnitt in der Schmiegungsebene λ *hat die Gleichung:*

$$(32)\qquad\begin{cases}(3\lambda^2+1)a^2u^2+((\lambda+2)^2+3)b^2v^2+((\lambda-2)^2+3)c^2w^2\\+(\lambda^2+3)s^2-2(\lambda+5)(\lambda-5)bcvw+4(\lambda-2)(3\lambda-1)cawu\\+4(\lambda+2)(3\lambda+1)abuv+8\lambda aus-2(\lambda-1)(\lambda+3)bvs\\\qquad+2(\lambda+1)(\lambda-3)cws=0.\end{cases}$$

§ 20. Die kub. Hyperbel im natürlichen Koordinatensystem.

1. Das natürliche Koordinatensystem. Das natürliche Koordinatensystem $Oxyz$ der kub. Hyperbel hat als Anfangspunkt O den

Mittelpunkt der Kurve, während seine Achsen x, y, z parallel sind den drei *Asymptoten.*

Die Parameterdarstellung der *Punkte, Schmiegungsebenen* und *Tangenten* im System $Oxyz$ wurde in § 19, (17); (18); (30) erhalten, die Gleichungen der *Sehnen, Achsen* und *Tangenten* in § 19, (23); (27); (28), des *Sehnenkegels* und *Achsenkegelschnittes* in § 19, (31); (32).

Wir legen nunmehr diese Gleichungen der Untersuchung der kub. Hyperbel zugrunde. Dabei werden alle vom Parameter λ freien Gleichungensysteme (s. z. B. (2); (4); (8)) vollkommen symmetrisch in x, y, z und a, b, c, Dasselbe würde auch für die mit dem Parameter λ behafteten Gleichungensysteme (s. z. B. (23), (24)) gelten, wenn wir den drei unendlich fernen Punkten die gleichbezeichneten Parameter $\lambda = \alpha, \beta, \gamma$ (§ 34, 15) an Stelle von $\lambda = \infty, 1, -1$ geben wollten, was jedoch die Formeln übrigens weitläufiger gestalten würde.

2. Die drei unendlich fernen Punkte. Die Form der Gleichungen § 19, (17); (18) hat folgende Bedeutung.

Die *drei unendlich fernen* Punkte $t = 0$ der kub. Hyperbel gehören nach der vierten Gleichung § 19, (17) *zu den Parameterwerten:*

$$\lambda = \infty, \; \lambda = 1, \; \lambda = -1 \tag{1}$$

und sind nach den drei ersten Gleichungen § 19, (17) die unendlich fernen Punkte der Achsen x, y, z.

Wenn die drei durch einen Punkt des Raumes gehenden Schmiegungsebenen alle drei zusammenfallen, so liegt der Punkt nach § 7, 8 auf der Kurve. Daher haben die Gleichungen $u = 0$; $v = 0$; $w = 0$ der drei unendlich fernen Punkte der Achsen x; y; z in Ebenenkoordinaten, nach § 19, (18), je einen der Werte (1) als dreifache Wurzel.

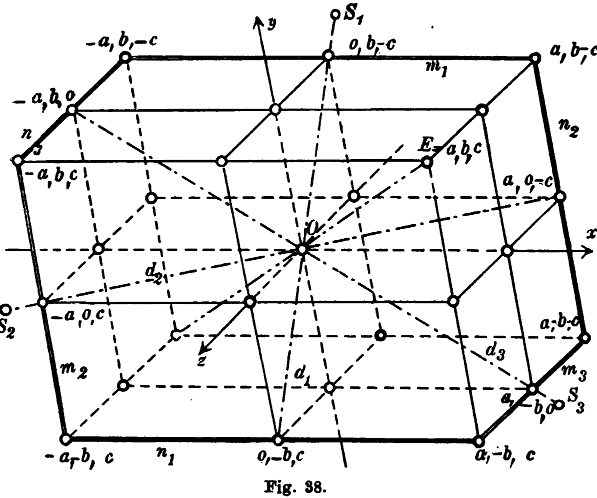


Fig. 38.

3. Die Asymptoten und das Parallelepipedon. *Die drei Asymptoten* n_1, n_2, n_3 *der kub. Hyperbel* haben als Tangenten in den Punkten (1) nach § 19, (28) mit $t = 1$ die Gleichungen:

(2) $n_1 : y = -b, z = c; \quad n_2 : z = -c, x = a; \quad n_3 : x = -a, y = b.$

Sie sind den Achsen x; y; z parallel. Um ihre Lage zu übersehen, konstruieren wir bei gegebenem System $Oxyz$ den Punkt:

$$E = a, b, c, \tag{3}$$

dessen Koordinaten nach § 19, (17) bei geeigneter Wahl der Pfeilspitzen der Achsen x, y, z positiv gelten können, und vervollständigen das durch diesen Punkt bestimmte *„Parallelepipedon der kub. Hyperbel“* mit den acht Ecken $\pm a, \pm b. \pm c$. Dann bilden die Asymptoten (2) drei Kanten dieses Parallelepipedons (Fig. 38), von denen keine eine der beiden andern schneidet.

4. Die drei Asymptotenebenen. *Die drei Asymptotenebenen* A_1, A_2, A_3 *der kub. Hyperbel* haben als Schmiegungsebenen in den Punkten (1) nach § 19, (18) mit $t = 1$ die Gleichungen:

$$A_1 : \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 2 = 0; \quad A_2 : \frac{z}{c} - \frac{x}{a} + 2 = 0; \quad A_3 : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2 = 0. \tag{4}$$

Sie gehen alle drei durch den unendlich fernen Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$, $t = 0$, bilden also ein *Prisma*, dessen Kanten:

$$\begin{cases} x : y - 2b : z + 2c = a : b : c; \quad x + 2a : y : z - 2c = a : b : c; \\ \qquad\qquad x - 2a : y + 2b : z = a : b : c \end{cases} \tag{5}$$

die Richtung der Diagonale OE des Parallelepipedons (Fig. 38) haben.

5. Die drei hyperbolischen Zylinder. *Die drei durch die kub. Hyperbel gehenden hyperbolischen Zylinder* haben als Sehnenkegel der Punkte (1) nach § 19, (31) die Gleichungen:

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{b} - 1\right)\left(\frac{z}{c} + 1\right) + 4 = 0, \quad \left(\frac{z}{c} - 1\right)\left(\frac{x}{a} + 1\right) + 4 = 0, \\ \qquad\qquad \left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\frac{y}{b} + 1\right) + 4 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Sie enthalten je eine der Asymptoten (2).

Ihre *Mittelpunktsachsen* m_1, m_2, m_3 (Fig. 38) sind nach der Form der Gleichungen (6):

(7) $m_1 : y = b, z = -c; \quad m_2 : z = c, x = -a; \quad m_3 : x = a, y = -b.$

Die Mittelpunktsachsen m_1, m_2, m_3 *sind daher die parallelen Gegenkanten der Asymptoten* n_1, n_2, n_3 *im Parallelepipedon der kub. Hyperbel.*

Die Verbindungsebenen der Asymptoten mit den gleichnamigen Mittelpunktsachsen sind die Diagonalebenen:

$$(8)\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,\quad \frac{z}{c}+\frac{x}{a}=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

des Parallelepipedons.

Die Asymptotenebenen:

$$(9)\qquad y=b, z=-c;\ z=c, x=-a;\ x=a, y=-b$$

der drei hyperbolischen Zylinder (6) *sind die sechs Seitenebenen des Parallelepipedons und verbinden jedesmal die Mittelpunktsachse eines Zylinders mit den beiden ungleichnamigen Asymptoten.*

6. Die drei Scheitelpunkte. Neben den drei Parameterwerten (1) sind im § 19, (17); (18) die drei Parameterwerte:

$$(10)\qquad \lambda=0,\quad \lambda=-3,\quad \lambda=3$$

ausgezeichnet. Die ihnen nach § 19, (17) entsprechenden Punkte der Kurve:

$$(11)\qquad S_1: x=0,\ y=3b,\ z=-3c\qquad S_2: x=-3a,\ y=0,\ z=3c;$$
$$S_3: x=3a,\ y=-3b,\ z=0$$

liegen in den durch die bezügliche Asymptote gehenden Diametralebenen (8) der drei hyperbolischen Zylinder, sind also (§ 11, (7); § 19, (16)) *die drei Scheitelpunkte der kub. Hyperbel* (in Fig. 38 sind die Strecken OS_1, OS_2, OS_3 der Raumersparnis wegen *verkürzt* angegeben).

In jeder der drei Koordinatenebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ liegt nach § 19, (17), außer zwei unendlich fernen Punkten (1) der Kurve, als dritter Kurvenpunkt einer der Scheitelpunkte (10).

7. Die drei Scheiteltangenten. Mit den Werten (10) von λ ergeben sich aus § 19, (28) *die drei Scheiteltangenten der kub. Hyperbel.* Ihre Gleichungen lassen sich im Anschluß an (11) in die Form bringen:

$$(12)\qquad x:y-3b:z+3c=a:4b:4c;\quad x+3a:y:z-3c=4a:b:4c;$$
$$x-3a:y+3b:z=4a:4b:c.$$

Da sie bezüglich in den Ebenen:

$$(13)\qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}-6=0;\quad \frac{z}{c}-\frac{x}{a}-6=0,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}-6=0$$

liegen, sind sie je einer Asymptotenebene (4) parallel.

8. Die drei Scheitelschmiegungsebenen. Aus § 19, (18) folgen mit den Werten (10) die Koordinaten und danach *die Gleichungen der drei Scheitelschmiegungsebenen:*

$$(14)\qquad 8\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0;\quad 8\frac{y}{b}-\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=0;\quad 8\frac{z}{c}-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

Es sind in Übereinstimmung mit der letzten Gleichung § 19, (18) diejenigen Schmiegungsebenen (10), die durch den Anfangspunkt $O(s=0)$ gehen. In der Tat war nach § 19, 2 *der Mittelpunkt O der kub. Hyperbel der Schnittpunkt der drei Scheitelschmiegungsebenen.*

9. Der Komplex der Tangenten. Die Tangenten einer Raumkurve 3. O. gehören nach § 8, 7 einem *linearen Strahlenkomplex* an. Um dessen Gleichung im jetzigen natürlichen System $Oxyz$:

$$a_{23}p_{23} + a_{31}p_{31} + a_{12}p_{12} + a_{14}p_{14} + a_{24}p_{24} + a_{34}p_{34} = 0 \tag{15}$$

zu erhalten, genügt die Kenntnis von fünf Komplexstrahlen. Solche sind aber die Asymptoten (2) mit den Strahlenkoordinaten:

$$0,\ c,\ b,\ -1,\ 0,\ 0; \quad c,\ 0,\ a,\ 0,\ -1,\ 0; \quad b,\ a,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,$$

durch die die Gleichung (15) auf:

$$\begin{cases} a_{23}(p_{23} + cp_{24} + bp_{34}) + a_{31}(p_{31} + ap_{34} + cp_{14}) \\ \qquad\qquad + a_{12}(p_{12} + bp_{14} + ap_{24}) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

zurückkommt; ferner die beiden letzten Scheiteltangenten (12) mit den Koordinaten (I § 48, (18)):

$$3bc,\ -24ca,\ 3ab,\ 4a,\ b,\ 4c; \quad 3bc,\ 3ca,\ -24ab,\ 4a,\ 4b,\ c,$$

mit denen aus (16) $a_{23}:a_{31}:a_{12} = a:b:c$ folgt.

Der lineare Komplex, dem die Tangenten der kub. Hyperbel angehören, ist:

$$ap_{23} + bp_{31} + cp_{12} + 2bcp_{14} + 2cap_{24} + 2abp_{34} = 0. \tag{17}$$

10. Pol und Polarebene. Zwischen Pol $x,\ y,\ z,\ t$ und Polarebene $u,\ v,\ w,\ s$ in bezug auf den Komplex (17) bestehen nach § 8, (22) bis auf einen Proportionalitätsfaktor die Beziehungen:

$$(18)\ \begin{cases} au = \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} + 2t, \\ bv = \dfrac{z}{c} - \dfrac{x}{a} + 2t, \\ cw = \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} + 2t, \\ s = -2\dfrac{x}{a} - 2\dfrac{y}{b} - 2\dfrac{z}{c}; \end{cases} \qquad (19)\ \begin{cases} \dfrac{x}{a} = 2bv - 2cw + s, \\ \dfrac{y}{b} = 2cw - 2au + s, \\ \dfrac{z}{c} = 2au - 2bv + s, \\ t = -au - bv - cw. \end{cases}$$

Es sind zugleich die Beziehungen zwischen Pol und Polarebene in bezug auf die kub. Hyperbel (§ 8, **9**, II).

11. Die Hauptebene. Mit $x=0,\ y=0,\ z=0,\ t=1$ folgt aus (18): $au=2,\ bv=2,\ cw=2,\ s=0$, also:

Die Polarebene des Mittelpunktes O der kub. Hyperbel ist:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0. \tag{20}$$

Sie ist in der Tat *die Verbindungsebene der drei Scheitelpunkte* (11), der Schmiegungspunkte der drei durch O gehenden Schmiegungsebenen (10) (§ 8, **9**, II).

Wir nennen sie *die Hauptebene der kub. Hyperbel.*

12. Die Hauptachse. Mit $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $s = 1$ folgt aus (19): $x = a$, $y = b$, $z = c$, $t = 0$, also:

I. *Der Pol der unendlich fernen Ebene ist:*

$$x : y : z = a : b : c, \quad t = 0. \tag{21}$$

Er ist in der Tat der Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen (4) der unendlich fernen Punkte (1).[1]

Die den Mittelpunkt O mit dem Punkte (21) verbindende Gerade:

$$x : y : z = a : b : c \tag{22}$$

die Diagonale OE des Parallelepipedons (Fig. 38) soll *die Hauptachse der kub. Hyperbel* heißen.

Der Pol irgend einer zur Hauptebene (20) parallelen Ebene: $u = 1 : a$, $v = 1 : b$, $w = 1 : c$, s hat nach (19) die Koordinaten $x = as$, $y = bs$, $r = cs$, $t = -3$, liegt also auf (22) oder:

II. *Die Hauptachse der kub. Hyperbel ist derjenige Durchmesser des Komplexes* (17) (II § 87, **2**), *auf dem die Pole aller zur Hauptebene der kub. Hyperbel parallelen Ebenen liegen.*

13. Die drei Achsendurchmesser. Die Bedingung, daß die Sehne $\lambda_1 \lambda_2$ und die Mittelpunktsachse m_1 sich in einem Punkte x, y, z, $(t = 1)$ schneiden, ergibt sich durch Einsetzen der Werte $y = b$, $z = -c$, $t = 1$ aus (7) in die Gleichungen § 19, (23), die dann zugleich auch x bestimmen. Indem man das Gleiche auch für m_2 und m_3 ausführt, findet man:

Die Sehne $\lambda_1 \lambda_2$ schneidet die Mittelpunktsachsen m_1, m_2, m_3 der drei hyperbol. Zylinder bezüglich unter den Bedingungen:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -2; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 2, \tag{23}$$

worauf der Schnittpunkt, der Halbierungspunkt der Sehne (§ 11, **9**), *neben den beiden bereits durch* (7) *bestimmten Koordinaten die dritte hat:*

$$x = a\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad y = -b\frac{\lambda_1 \lambda_2 - 5}{\lambda_1 \lambda_2 + 3}, \quad z = c\frac{\lambda_1 \lambda_2 - 5}{\lambda_1 \lambda_2 + 3}. \tag{24}$$

1) R. Mehmke, Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), S. 240.

Um zu gegebenem Punkte einer der Mittelpunktsachsen die von ihm halbierte Sehne zu bestimmen, bestimmt man aus (23) und (24) jedesmal $\lambda_1 \lambda_2$ und $\lambda_1 + \lambda_2$ und damit die quadratische Gleichung für λ_1 und λ_2:

$$(25) \quad \begin{cases} \lambda^2 - 2\frac{x}{a}\lambda + 1 = 0, \quad \left(1 + \frac{y}{b}\right)(\lambda^2 + 2\lambda) + \left(5 - 3\frac{y}{b}\right) = 0; \\ \left(\frac{z}{c} - 1\right)(\lambda^2 - 2\lambda) - \left(5 + 3\frac{z}{c}\right) = 0. \end{cases}$$

Die Wurzeln dieser Gleichungen sind reell, wenn:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 > 0; \quad \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0; \quad \frac{z^2}{c^2} - 1 > 0:$$

Die Mittelpunktsachsen m_1, m_2, m_3 werden nur außerhalb der Abschnitte, mit denen sie dem Parallelepipedon (Fig. 38) als Kanten angehören, von reellen Sehnen getroffen.

Die in den beiden Endpunkten einer solchen Kante treffenden Sehnen sind die beiden mit ihr ungleichnamigen Asymptoten n_1, n_2, n_3.

14. Die drei Scheiteldurchmesser. Zwei Punkte λ_1 und λ_2 der kub. Hyperbel haben nach § 19, (17) die gemeinen Koordinaten:

$$(26) \quad \begin{cases} x_1 = a\lambda_1, \quad y_1 = -b\frac{\lambda_1 + 3}{\lambda_1 - 1}, \quad z_1 = c\frac{\lambda_1 - 3}{\lambda_1 + 1}, \\ x_2 = a\lambda_2, \quad y_2 = -b\frac{\lambda_2 + 3}{\lambda_2 - 1}, \quad z_2 = c\frac{\lambda_2 - 3}{\lambda_2 + 1}. \end{cases}$$

Der Mittelpunkt der Sehne $\lambda_1 \lambda_2$ ist daher:

$$(27) \quad x = a\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad y = -b\frac{\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) - 3}{\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + 1}, \quad z = c\frac{\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) - 3}{\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) + 1}.$$

Macht man insbesondere Summe und Produkt von λ_1 und λ_2 auf eine der drei Weisen:

$$(28) \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{3 - \sigma}{1 + \sigma}; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -2\sigma, \quad \lambda_1\lambda_2 = 2\sigma + 3; \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2\sigma, \quad \lambda_1\lambda_2 = 2\sigma + 3 \end{cases}$$

von einem Parameter σ abhängig, so geben die Formeln (27) für den Mittelpunkt der Sehne $\lambda_1 \lambda_2$ bezüglich:

$$(29) \quad \begin{cases} x = 0, \quad y = b\sigma, \quad z = -c\sigma; \quad x = -a\sigma, \quad y = 0, \quad z = c\sigma; \\ x = a\sigma, \quad y = -b\sigma, \quad z = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (29) stellen aber bei veränderlichem σ drei gerade Linien dar, die den Mittelpunkt O der kub. Hyperbel, $\sigma = 0$, mit den drei Scheitelpunkten (11), $\sigma = 3$, verbinden.

I. *Die Verbindungslinien des Mittelpunktes mit den drei Scheitelpunkten sind die drei Scheiteldurchmesser der kub. Hyperbel.*[1])

Unter Elimination von σ folgt nämlich (§ 11, 8) aus (28):

II. *Jeder der drei Scheiteldurchmesser* d_1, d_2, d_3 (Fig. 38) *halbiert alle Sehnen* $\lambda_1 \lambda_2$ *für die bezüglich:*

$$(30) \qquad \lambda_2 = -\lambda_1, \quad \lambda_2 = -\frac{\lambda_1 - 3}{\lambda_1 + 1}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1 + 3}{\lambda_1 - 1}.$$

Die drei Scheiteldurchmesser sind nach (29) auch durch die Gleichungenpaare:

$$(31) \quad \begin{cases} d_1 : x = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0; \quad d_2 : y = 0, \quad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0; \\ \qquad d_3 : z = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

dargestellt und daher *die Schnittlinien der Hauptebene (20) mit den Koordinatenebenen.*

15. Realität der halbierten Sehnen. Um zu gegebenem Punkte σ eines Scheiteldurchmessers (29) die von ihm halbierte Sehne zu finden, entnimmt man aus (28) die quadratische Gleichung für λ_1, λ_2:

$$\lambda^2 + \frac{3 - \sigma}{1 + \sigma} = 0; \quad \lambda^2 + 2\sigma\lambda + 2\sigma + 3 = 0; \quad \lambda^2 - 2\sigma\lambda + 2\sigma + 3 = 0$$

und erhält die Wurzeln:

$$(32) \quad \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 = \pm \sqrt{\frac{\sigma - 3}{\sigma + 1}}; \quad \lambda_1, \lambda_2 = -\sigma \pm \sqrt{(\sigma + 1)(\sigma - 3)}; \\ \qquad \lambda_1, \lambda_2 = \sigma \pm \sqrt{(\sigma + 1)(\sigma - 3)}. \end{cases}$$

Daher werden die Scheiteldurchmesser d_1, d_2, d_3 *nur außerhalb der Strecke vom Scheitelpunkt* (11), $\sigma = 3$ *in* (29), *bis zum Durchschnittspunkt mit der gleichnamigen Asymptote* (2), $\sigma = -1$ *in* (29), *von reellen Sehnen getroffen (Fig.* 39).

$-\frac{3}{2}$ -1 0 3 σ

Fig. 39.

16. Besondere halbierte Sehnen. Die von den Endpunkten dieser Strecke halbierten Sehnen sind nach (32) und (10) *die Scheiteltangenten* $\sigma = 3$ und nach (32) und (1) die *Asymptoten* $\sigma = -1$.

Mit $\sigma = -3:2$ ergibt sich aus (32): $\lambda_1, \lambda_2 = -3, 3; 3, 0; 0, -3,$ woraus nach (10) folgt:

I *Die Scheiteldurchmesser halbieren in* M_1, M_2, M_3 *die Seiten des Scheitelpunktsdreiecks* $S_1 S_2 S_3$, *sind also dessen Transversalen* $S_1 M_1$, $S_2 M_2$, $S_3 M_3$ (Fig. 42).

1) Der Mittelpunkt als Schnittpunkt der drei Durchmesser bei L. Geisenheimer, Zeitschr. Math. Phys. 27 (1882), S. 322.

Der gemeinsame Punkt O, $\sigma = 0$, der drei Durchmesser (29), halbiert nach jeder der drei Angaben (32) die Sehne:

$$\lambda_1 = i\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{3} \quad (\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \lambda_1 \lambda_2 = 3)$$

oder nach § 19, (23):

$$-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0.$$

Dies bedeutet nach (22):

II. *Die Hauptachse der kub. Hyperbel ist die durch den Mittelpunkt O gehende Sehne* (§ 8, **3**), *die von jedem der drei Durchmesser halbiert wird.*

Sie hat *keine reellen Endpunkte* λ_1, λ_2, während durch O drei reelle Schmiegungsebenen gehen (§ 26, **10**).

17. Schließungssatz über ein Sehnensechseck. Zu jedem Punkte λ_1 der kub. Hyperbel gehören nach (30) drei bestimmte Punkte λ_2, deren Verbindungslinien $\lambda_1\lambda_2$ mit λ_1 je von einem der Durchmesser d_1, d_2, d_3 halbiert werden.

Geht man von einem Punkte $\lambda_1 = \lambda$ aus und bestimmt dann, indem man die Reihe (30) zweimal durchläuft, die weiteren Punkte:

$$(33) \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda, & \lambda_3 = -\frac{\lambda_2 - 3}{\lambda_2 + 1} = -\frac{\lambda + 3}{\lambda - 1}, \quad \lambda_4 = \frac{\lambda_3 + 3}{\lambda_3 - 1} = -\frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}, \\ \lambda_5 = -\lambda_4 = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}, & \lambda_6 = -\frac{\lambda_5 - 3}{\lambda_5 + 1} = \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1}, \quad \lambda_7 = \frac{\lambda_6 + 3}{\lambda_6 - 1} = \lambda, \end{cases}$$

so *schließt sich die Reihe,* indem λ_7 wieder in $\lambda_1 = \lambda$ fällt, *zu einem Sehnensechseck, dessen gegenüberliegende Seitenpaare $\lambda_1\lambda_2$ und $\lambda_4\lambda_5$; $\lambda_2\lambda_3$ und $\lambda_5\lambda_6$; $\lambda_3\lambda_4$ und $\lambda_6\lambda_1$ bezüglich von den Durchmessern d_1; d_2; d_3 halbiert werden* (Fig. 42 sind drei solche Sechsecke dargestellt, die den Werten $\lambda_1 = 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}$ entsprechen).

Für $\lambda_1 = 0, -3$ oder 3 entartet das Sehnensechseck in das Scheitelpunktsdreieck in **16**, I, entweder in Verbindung mit den drei Scheiteltangenten ($S_1S_2S_3$ und t_1, t_2, t_3 in Fig. 42) oder verdoppelt.

Die Koordinaten der sechs Punkte (33) entsprechen nach (26) den Gleichungen:

$$\frac{x_1}{a} = \lambda, \ \frac{y_1}{b} = -\frac{\lambda + 3}{\lambda - 1}, \ \frac{z_1}{c} = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}; \quad \frac{x_2}{a} = -\lambda, \ \frac{y_2}{b} = -\frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}, \ \frac{z_2}{c} = \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1};$$

$$\frac{x_3}{a} = -\frac{\lambda + 3}{\lambda - 1}, \ \frac{y_3}{b} = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}, \ \frac{z_3}{c} = \lambda; \quad \frac{x_4}{a} = -\frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}, \ \frac{y_4}{b} = \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1}, \ \frac{z_4}{c} = -\lambda;$$

$$\frac{x_5}{a} = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}, \ \frac{y_5}{b} = \lambda, \ \frac{z_5}{c} = -\frac{\lambda + 3}{\lambda - 1}; \quad \frac{x_6}{a} = \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1}, \ \frac{y_6}{b} = -\lambda, \ \frac{z_6}{c} = -\frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}.$$

Danach liegen die Punkte λ_1, λ_3, λ_5, sowie die Punkte λ_2, λ_4, λ_6 bezüglich in den Ebenen:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\lambda-\frac{\lambda+3}{\lambda-1}+\frac{\lambda-3}{\lambda+1}; \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=-\lambda-\frac{\lambda-3}{\lambda+1}+\frac{\lambda+3}{\lambda-1}$$

oder:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{\lambda^3-9\lambda}{\lambda^2-1}; \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=-\frac{\lambda^3-9\lambda}{\lambda^2-1}.$$

Sowohl die drei ungeraden, als die drei geraden Ecken des Sechsecks (33) *liegen in einer zur Hauptebene* (20) *parallelen Ebene. Die beiden parallelen Ebenen liegen zu beiden Seiten der Hauptebene in gleichem Abstand von ihr und fallen für* $\lambda=0$, -3 *oder* 3 *in sie hinein.*

18. Die Doppelpyramidengruppe[1]) **der kub. Hyperbel.** Durch die sechs linearen Substitutionen:

$$(34) \quad s_0:\lambda'=\lambda; \quad s_1:\lambda'=-\lambda; \quad s_2:\lambda'=-\frac{\lambda-3}{\lambda+1}; \quad s_3:\lambda'=\frac{\lambda+3}{\lambda-1};$$
$$s_4:\lambda'=-\frac{\lambda+3}{\lambda-1}; \quad s_5:\lambda'=\frac{\lambda-3}{\lambda+1}$$

geht nach (33) der Punkt $\lambda_1=\lambda$ auch unmittelbar in jeden der sechs Punkte $\lambda'=\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_3, \lambda_5$ über.

Die Substitutionen (34) aber bilden eine Gruppe mit den Merkmalen:

$$(35) \begin{cases} s_1^2=1, \; s_2^2=1, \; s_3^2=1; \; s_4^2=s_5, \; s_5^2=s_4; \; s_4^3=1, \; s_5^3=1; \\ s_2s_3=s_3s_1=s_1s_2=s_4; \; s_3s_2=s_1s_3=s_2s_1=s_5; \\ s_1s_4=s_5s_1=s_2, \; s_2s_4=s_5s_2=s_3, \; s_3s_4=s_5s_3=s_1; \\ s_4s_1=s_1s_5=s_3, \; s_4s_2=s_2s_5=s_1, \; s_4s_3=s_3s_5=s_2; \; s_4s_5=s_5s_4=1. \end{cases}$$

Die geometrische Bedeutung der drei Substitutionen s_1, s_2, s_3 der Gruppe ist in **14**, II enthalten. In Fig. 42 wird auch P_1P_2 von d_1, P_1P_4 von d_2, P_1P_6 von d_3 halbiert.

Durch jede Substitution der Gruppe, angewendet auf alle Punkte λ, *geht die kub. Hyperbel in sich über.*

19. Flächen der von den Scheiteldurchmessern halbierten Sehnen. Die Gleichungenpaare *der Sehnen* $\lambda_1\lambda_2$, *deren Parameter durch eine der Bedingungen* (28) *verknüpft sind*, lauten nach § 19, (23):

$$(36) \begin{cases} (\sigma+1)\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\sigma=0, \\ (\sigma+1)\frac{x}{a}-\frac{z}{c}-\sigma=0; \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{a}-(\sigma+1)\frac{y}{b}+\sigma=0, \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}+2\sigma=0; \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}-2\sigma=0, \\ \frac{x}{a}-(\sigma+1)\frac{z}{c}-\sigma=0. \end{cases}$$

Die Sehnen sind wegen der für sie geltenden Gleichungen:

1) H. Wiener in B. G. Teubners Verz. math. Modelle 1912, S. 30.

(37) $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 2\sigma; \quad \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 2\sigma; \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\sigma$

jedesmal einer der Asymptotenebenen (4) *parallel.* Durch Elimination von σ ergibt sich mit Rücksicht hierauf:

Diejenigen Sehnen, die von einem der drei Scheiteldurchmesser halbiert werden bilden die eine Schar der Erzeugenden eines der drei hyperbolischen Paraboloide:

(38)
$$H_1 = \frac{zx}{ca} - \frac{xy}{ab} - 2\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0;$$
$$H_2 = \frac{xy}{ab} - \frac{yz}{bc} - 2\frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0;$$
$$H_3 = \frac{yz}{bc} - \frac{zx}{ca} - 2\frac{z}{c} + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Da identisch in x, y, z:

(39)
$$H_1 + H_2 + H_3 = 0$$

so gehören diese drei Paraboloide einem Büschel von Flächen 2. O. an.

Sie gehen alle drei durch die kub. Hyperbel und durch deren Hauptachse (22), *die Sehne des Mittelpunktes* (vgl. § 37, 7).

20. Das Flächenbündel der kub. Hyperbel. Die drei Zylinder (6) gehören keinem Büschel an, da die beiden letzten, homogen geschrieben, die Gerade $x = 0$, $t = 0$ gemein haben, die dem ersten nicht angehört.

Daher ist mit den homogenen Parametern ϱ, σ, τ die Gleichung des Bündels aller durch die kub. Hyperbel gehenden Flächen 2. O:

(40)
$$\varrho\frac{yz}{bc} + \sigma\frac{zx}{ca} + \tau\frac{xy}{ab} - (\sigma - \tau)\frac{x}{a}t - (\tau - \varrho)\frac{y}{b}t$$
$$- (\varrho - \sigma)\frac{z}{c}t + 3(\varrho + \sigma + \tau)t^2 = 0.$$

Die Determinante der mit 2 multiplizierten Gleichung (40) und die Unterdeterminante ihres letzten Elementes sind:

(41)
$$A = 4\left(\frac{\sigma\tau + \tau\varrho + \varrho\sigma}{abc}\right)^2; \quad A_{44} = \frac{2\varrho\sigma\tau}{a^2b^2c^2}.$$

Ist $A \neq 0$, ist die Fläche (40) für $A_{44} \neq 0$ ein *einschaliges Hyperboloid*, für $A_{44} = 0$ ein *hyperbolisches Paraboloid.*

Ist $A = 0$, wird sie der *Sehnenkegel* § 19, (31) des Punktes:

(42)
$$\lambda = \frac{2\varrho + \sigma}{\sigma} = -\frac{2\varrho + \tau}{\tau},$$

während:

$$\varrho : \sigma : \tau = (\lambda - 1)(\lambda + 1) : 2(\lambda + 1) : -2(\lambda - 1).$$

21. Die Achse der unendlich fernen Ebene. Soll die Achse § 19, (27) in der unendlich fernen Ebene $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $s = 1$ liegen, muß:

(43) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 3: \quad \lambda_1 = i\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{3}$

sein, worauf die Gleichungen § 19, (27) werden:

$$2au - bv - cw = 0, \quad bv - cw = 0$$

oder in Punktkoordinaten:

(44) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad t = 0.$$

Die in der unendlich fernen Ebene liegende Achse ist die Schnittlinie jener mit der Hauptebene (20).

Die Schmiegungspunkte der beiden durch sie gehenden imaginären Schmiegungsebenen (43) sind nach **16** die imaginären Endpunkte der durch den Mittelpunkt gehenden Sehne.

22. Der Mittelpunktskegelschnitt. Der Mittelpunktskegelschnitt der kub. Hyperbel ist nach § 10, **7**, II eine *Ellipse*. Ihre Parameterdarstellung lautet nach § 19, (32):

(45) $x = 4a\lambda, \; y = -b(\lambda - 1)(\lambda + 3), \; z = c(\lambda + 1)(\lambda - 3), \; t = \lambda^2 + 3.$

Da diese Werte von x, y, z unabhängig von λ der Gleichung (20) genügen, so folgt (§ 11, **2**, III):

Der Mittelpunktskegelschnitt liegt in der Hauptebene (20).

Die Ellipse (45) schneidet die Koordinatenebenen in den Punktepaaren $\lambda = \infty, 0; \; 1, -3; \; -1, 3$ oder ($t = 1$):

(46) $0, -b, c$ und $0, b, -c$; $a, 0, -c$ und $-a, 0, c$; $-a, b, 0$ und $a, -b, 0$,

also in den Schnittpunkten der Scheiteldurchmesser d_1, d_2, d_3 in (29) mit den Asymptoten n_1, n_2, n_3 in (2) und den Mittelpunktsachsen m_1, m_2, m_3 in (7) (Fig. 38). Sie hat ihren Mittelpunkt im Anfangspunkt O[1]), der alle diejenigen ihrer Sehnen $\lambda\lambda'$, für die $\lambda\lambda' + 3 = 0$ ist, halbiert.

23. Die Achsenkegelschnitte der Asymptotenebenen. Für die Achsenkegelschnitte in den drei Asymptotenebenen (4) ergibt sich mit den Parameterwerten (1) aus § 19, (32):

(47)
$$(-bv + cw + s)^2 + 3au(au + 4bv + 4cw) = 0$$
$$(-cw + au + s)^2 + 3bv(bv + 4cw + 4au) = 0,$$
$$(-au + bv + s)^2 + 3cw(cw + 4au + 4bv) = 0.$$

Sie sind nach § 10, **5**, II *Hyperbeln*.

1) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 205; Geisenheimer, Zeitschr. Math. Phys. 27 (1882), S. 322.

Aus der Form der ersten Gleichung (47) (II § 52, (7')) geht hervor, daß die unendlich fernen Punkte (I § 47, (8)):

$$(48) \qquad u = 0, \quad au + 4bv + 4cw = 0$$

die Berührungspunkte der vom Punkte:

$$(49) \qquad -bv + cw + s = 0$$

an die erste Hyperbel (47) gelegten Tangenten sind. Diese sind daher die Asymptoten, die eine nach (48) der x-Achse, die andere der ersten Scheiteltangente (12) parallel, und der Punkt (49), der erste (46), ist der Mittelpunkt der Hyperbel.

Die drei Hyperbeln (47) haben als Mittelpunkte die Schnittpunkte der Durchmesser d_1, d_2, d_3 je mit der gleichnamigen Asymptote n_1, n_2, n_3 der Raumkurve und als Asymptoten je eine der Asymptoten n_1, n_2, n_3 und je eine Parallele zu den drei Scheiteltangenten.

24. Die drei Zweige. Während der Parameter λ sich von $+\infty$ bis $-\infty$ bewegt, geht die kub. Hyperbel § 19, (17) dreimal durch die unendlich ferne Ebene hindurch (Fig. 40). *Sie besteht daher aus drei Zweigen e_1, e_2, e_3,* die je einen Scheitelpunkt $\lambda = 0, -3, 3$ enthalten. Der

e_2 e_1 e_3
$-\infty$ -3 -1 0 $+1$ $+3$ λ $+\infty$
n_1 S_2 n_3 S_1 n_2 S_3 n_1

Fig. 40.

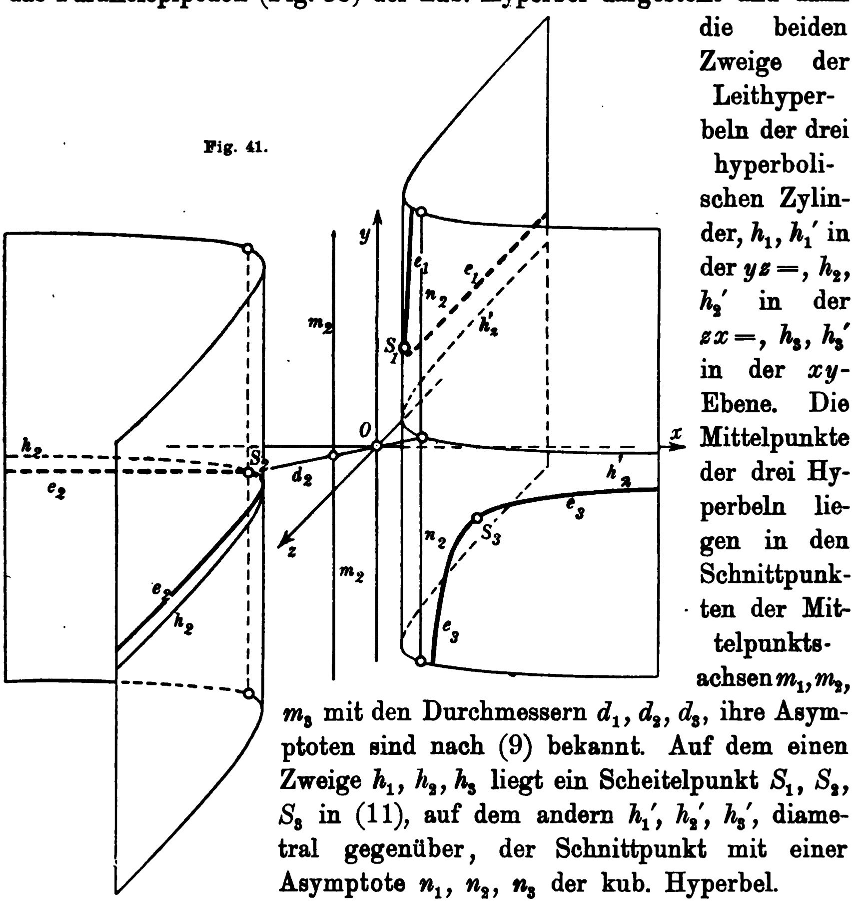
Zweig e_1 (Fig. 40) erstreckt sich, während λ von $+1$ über 0 nach -1 geht, von der Asymptote n_2 her über den Scheitelpunkt S_1 gegen die Asymptote n_3; der Zweig e_2, während λ von -1 über -3 nach $-\infty$ geht, von n_3 über S_2 gegen n_1; der Zweig e_3, während λ von $+\infty$ über $+3$ nach $+1$ geht, von n_1 über S_3 gegen n_2.

Von den beiden Mänteln eines jeden der drei hyperbol. Zylinder (6) enthält immer der eine, h_1, h_2 (Fig. 41), h_3 einen Scheitelpunkt S_1, S_2, S_3, der andere h_1', h_2' (Fig. 41), h_3', diametral gegenüberliegend, eine Asymptote n_1, n_2, n_3. Alsdann *verteilen sich die drei Kurvenzweige auf die sechs Zylindermäntel* in der Weise, daß

$$e_1 \text{ auf } h_1,\ e_2 \text{ und } e_3 \text{ auf } h_1'; \quad e_2 \text{ auf } h_2,\ e_3 \text{ und } e_1 \text{ auf } h_2' \text{ (Fig. 41)};$$
$$e_3 \text{ auf } h_3,\ e_1 \text{ und } e_2 \text{ auf } h_3'.$$

25. Darstellung der kub. Hyperbel. Wennschon die Kurve auf *einem* hyperbol. Zylinder (Fig. 41) aufgezeichnet werden kann, so erscheint es doch zweckmäßig die volle Gleichberechtigung der drei Zylinder und die in **18** bemerkte Gruppe der kub. Hyperbel in der Darstellung zum Ausdruck zu bringen. Diesem Zweck dient Fig. 42, aus der auch Fig. 41 durch Hinzufügung des einen Zylinders entstanden ist.

In Fig. 42 dient die xy-Ebene des natürlichen Koordinatensystems $Oxyz$ als Ebene der Zeichnung in schiefer Projektion. $Oxyz$ ist rechtwinklig angenommen, was aber unwesentlich ist. Zunächst ist das Parallelepipedon (Fig. 38) der kub. Hyperbel dargestellt und dann die beiden Zweige der Leithyperbeln der drei hyperbolischen Zylinder, h_1, h_1' in der $yz=$, h_2, h_2' in der $zx=$, h_3, h_3' in der xy-Ebene. Die Mittelpunkte der drei Hyperbeln liegen in den Schnittpunkten der Mittelpunktsachsen m_1, m_2, m_3 mit den Durchmessern d_1, d_2, d_3, ihre Asymptoten sind nach (9) bekannt. Auf dem einen Zweige h_1, h_2, h_3 liegt ein Scheitelpunkt S_1, S_2, S_3 in (11), auf dem andern h_1', h_2', h_3', diametral gegenüber, der Schnittpunkt mit einer Asymptote n_1, n_2, n_3 der kub. Hyperbel.



Die beiden Zylinder über den in der zx- und xy-Ebene liegenden Hyperbeln h_2, h_2' und h_3, h_3' sind der y- und z-Achse parallel. Legt man nun durch einen Punkt X der x-Achse (Fig. 42 ganz rechts) Parallelen zur z- und y-Achse, so schneiden diese die Zweige h_2' und h_3 in H' und H. Der vierte Eckpunkt P des Parallelogramms $XH'HP$ ist als Schnittpunkt der Erzeugenden $H'P$ und HP der beiden Zylinder in der Ebene des Parallelogramms ein Punkt der Kurve. Der Punkt X hat den Abstand $9a$ von O, die entsprechenden Abstände $7a$, $5a$ geben zwei weitere Punkte der Kurve, dem Abstand $3a$ entspricht der Scheitel S_3. In gleicher Weise ergeben sich (Fig. 42 links),

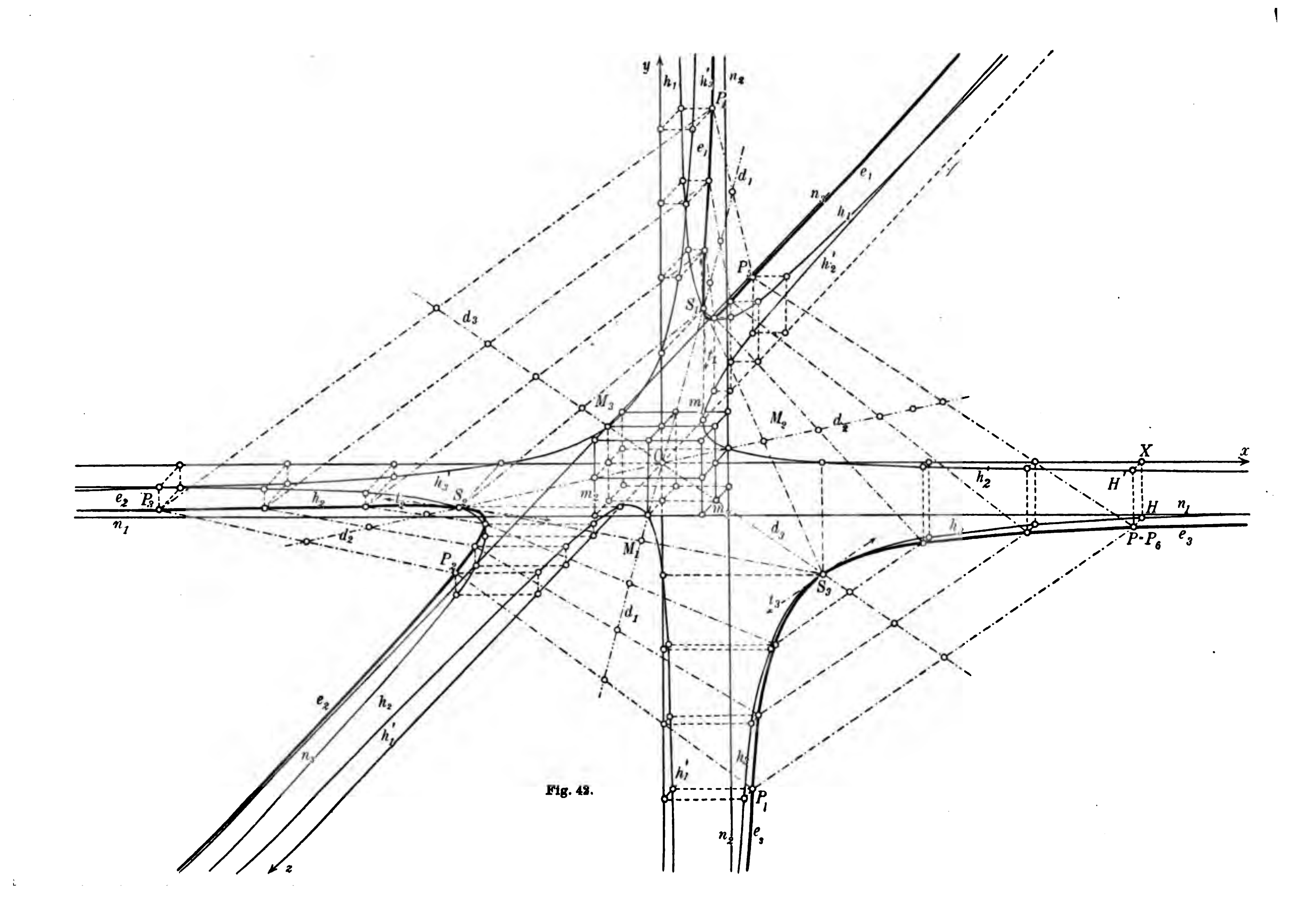


Fig. 42.

den Abständen $-9a$, $-7a$, $-5a$, $-3a$ entsprechend drei Punkte und der Scheitel S_2. Entsprechend verfährt man auf den anderen Achsen y und z. Die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 = P$ bilden ein Sechseck der unter **17** beschriebenen Art.

26. Die Rotationsflächen im natürlichen System. Bei der Darstellung der kub. Hyperbel im natürlichen System sind die unendlich fernen Punkte E_1, E_2, E_3 der Kurve (Fig. 25, S. 67) zugleich die Ecken X, Y, Z des Koordinatendreiecks in der unendlich fernen Ebene, aber dieses ist nicht mehr, wie in § 14, 2, ein Polardreieck des Kugelkreises. Des letzeren Gleichung lautet jetzt neben $t = 0$ (II § 91, (10)):

(50) $$x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha yz + 2\beta zx + 2\gamma xy = 0,$$

wo α, β, γ die Kosinus der Achsenwinkel sind.

Die Schnittpunkte $S_3 = x_1, y_1, 0$ und $S_3' = x_1', y_1', 0$ der Seite $s_3 = E_1 E_2$ oder $z = 0$ mit dem Kugelkreis sind daher durch die quadratische Gleichung bestimmt:

$$x^2 + y^2 + 2\gamma xy = 0: \quad \frac{x_1}{y_1}\frac{x_1'}{y_1'} = 1.$$

Die durch S_3, S_3' und die Ecken $E_1 = 1, 0, 0$, $E_2 = 0, 1, 0$ bestimmte Involution hat somit die Gleichung:

$$xx' - yy' = 0$$

und die Doppelpunkte:

$$x^2 - y^2 = 0 : D_3 = 1, 1, 0; \quad D_3' = 1, -1, 0.$$

In gleicher Weise werden die Doppelpunkte der Involution auf der Seite s_2:

(51) $$D_2 = 1, 0, 1; \quad D_2' = -1, 0, 1.$$

Die Gleichungen der vier Berührungssehnen § 14, 3 *lauten daher* (Fig. 25):

(52) $$D_2'D_3' : x + y + z = 0; \quad D_2 D_3 : -x + y + z = 0;$$
$$D_2' D_3 : x - y + z = 0; \quad D_2 D_3' : x + y - z = 0.$$

Die unendlich fernen Kurven der zugehörigen Rotationsflächen sind dann wie § 14, 7:

(53) $$(x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha yz + 2\beta zx + 2\gamma xy) - (\varepsilon x + \varepsilon' y + \varepsilon'' z)^2 = 0,$$

wo für $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ die Vorzeichenkombinationen zu setzen sind:

$$\varepsilon, \varepsilon' \varepsilon'' = 1, 1, 1; \quad -1, 1, 1; \quad 1, -1, 1; \quad 1, 1, -1,$$

oder auch:

$$(\varepsilon'\varepsilon'' - \alpha)yz + (\varepsilon''\varepsilon - \beta)zx + (\varepsilon\varepsilon' - \gamma)xy = 0.$$

Die Gleichungen der vier durch die kub. Hyperbel gehenden Rotationsflächen gehen daher aus (40) hervor mit den vier Wertsystemen der Parameter ϱ, σ, τ:

$$(54)\quad \begin{cases} \varrho = \quad bc(1-\alpha), & \sigma = \quad ca(1-\beta), \quad \tau = \quad ab(1-\gamma); \\ \varrho = \quad bc(1-\alpha), & \sigma = -ca(1+\beta), \quad \tau = -ab(1+\gamma); \\ \varrho = -bc(1+\alpha), & \sigma = \quad ca(1-\beta), \quad \tau = -ab(1+\gamma); \\ \varrho = -bc(1+\alpha), & \sigma = -ca(1+\beta), \quad \tau = \quad ab(1-\gamma). \end{cases}$$

§ 21. Die gleichseitige und die gleichwinklige kub. Hyperbel.

1. Bedingungen der gleichseitigen kub. Hyperbel. Die *kub. Hyperbel* § 19, (1) ist *gleichseitig*[1]), wenn:

$$(1)\qquad ae^2 + a'' = 0, \quad a' = 0, \quad b^2e^2 - b'^2 - c^2 = 0.$$

Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend sowohl dafür, daß *die drei unendlich fernen Punkte der Kurve ein Polardreieck des imaginären Kugelkreises bilden* (§ 16, 7), als auch dafür, daß *alle durch die Kurve gehenden Flächen 2. O., darunter alle Sehnenkegel und die drei hyperbolischen Zylinder, gleichseitig sind* (§ 9, **17**).

Das natürliche System, auf das sich die Gleichungen § 19, (17) beziehen, ist dann rechtwinklig, da seine Achsen die Richtungen nach den drei unendlich fernen Punkten der Kurve haben. Ebenso wird das Parallelepipedon § 20, **3** rechtwinklig.

2. Die Rotationsflächen der gleichseitigen kub. Hyperbel. Da die Kosinus der Achsenwinkel des natürlichen Systems jetzt:

$$(2)\qquad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

werden, so ergibt sich aus § 20, (40); (54):

Die vier durch die gleichseitige kub. Hyperbel gehenden gleichseitigen Rotationshyperboloide haben im natürlichen System die Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} yz + zx + xy + (b-c)xt + (c-a)yt + (a-b)zt \\ \qquad\qquad + 3(bc + ca + ab)t^2 = 0, \\ yz - zx - xy - (b-c)xt + (c+a)yt - (a+b)zt \\ \qquad\qquad + 3(bc - ca - ab)t^2 = 0, \\ -yz + zx - xy - (b+c)xt - (c-a)yt + (a+b)zt \\ \qquad\qquad + 3(-bc + ca - ab)t^2 = 0, \\ -yz - zx + xy + (b+c)xt - (c+a)yt - (a-b)zt \\ \qquad\qquad + 3(-bc - ca + ab)t^2 = 0. \end{cases}$$

---

1) Th. Reye, Geom. d. L. 2 (1907), S. 180; Ch. Bioche, Edinb. M. S Proc. 13 (1895), S. 146.

Ihre Mittelpunkte:

(4) $x_0, y_0, z_0 = b - c,\ c - a,\ a - b;\quad -(b - c),\ c + a,\ -(a + b);$
$-(b + c),\ -(c - a),\ a + b;\quad b + c,\ -(c + a),\ -(a - b)$

liegen alle vier in der zur Hauptachse § 20, (22) senkrechten Ebene:

(5) $$ax + by + cz = 0.$$

Die Determinanten der vier Flächen (3) sind nach § 20, (41), von dem Faktor 4 abgesehen:

$$(a + b + c)^2,\quad (-a + b + c)^2,\quad (a - b + c)^2,\quad (a + b - c)^2,$$

so daß *eine* von ihnen ein *Rotationskegel* werden kann.

3. Gleichwinklige kub. Hyperbel. Die kub. Hyperbel soll *gleichwinklig* genannt werden, *wenn die Achsenwinkel des natürlichen Koordinatensystems einander gleich und die Kanten des Parallelepipedons* § 20, 3 *gleich lang sind.* Die zweite Eigenschaft erfordert, daß die Konstanten a, b, c in § 19, (17) alle drei gleich werden oder daß die Konstanten in § 19, (1) mit Rücksicht auf § 19, (16) den Bedingungen genügen:

(6) $$p = q = -8ae^2;$$

die erste Eigenschaft erfordert, mit den aus § 19, (6) folgenden Werten der Achenwinkelkosinus:

(7) $$\alpha = \frac{(ae^2 + a'')^2 - a'^2e^2 - b^2e^2 + b'^2 + c^2}{pq},\quad \beta = \frac{ae^2 - a'e + a''}{q},$$
$$\gamma = \frac{ae^2 + a'e + a''}{p}:$$

(8) $$\alpha = \beta = \gamma.$$

Die Bedingung $p^2 = q^2$ gibt nach § 19, (7):

(9) $$(ae^2 + a'')a' + bb' = 0$$

und die Bedingung $\beta = \gamma$ mit Rücksicht auf $p = q$:

$$a' = 0, \text{ worauf aus (9): } b' = 0.$$

Dann geht aus $p = -8ae^2$ und $\alpha = \beta$ weiter hervor:

$$(ae^2 + a'')^2 + b^2e^2 + c^2 = 64a^2e^4,$$
$$(ae^2 + a'')^2 - b^2e^2 + c^2 = -8ae^2(ae^2 + a'')$$

und daraus durch Kombination:

$$b^2 = 36a^2e^2 + 4aa'',\quad c^2 = 27a^2e^4 - a''^2 - 6ae^2a''.$$

Unter den Bedingungen:

(10) $$a' = 0,\ b' = 0,\ b^2 = 4a(9ae^2 + a''),\ c^2 = (9ae^2 + a'')(3ae^2 - a'')$$

sind daher bei entsprechender Wahl der Vorzeichen von p und q die Gleichungen (6) und (8) erfüllt.

Zugleich wird:

$$\alpha = \beta = \gamma = -\frac{ae^2 + a''}{8ae^2}. \tag{11}$$

Bei positivem a muß nach (10) a'' zwischen den Grenzen:

$$-9ae^2 < a'' < 3ae^2$$

genommen werden, worauf für die Kosinus α, β, γ in (11):

$$-\frac{1}{2} < -\frac{ae^2 + a''}{8ae^2} < 1, \tag{12}$$

also die Achsenwinkel selbst zwischen 0° und 120° gelegen sind.

Wenn für die kub. Hyperbel § 19, (1) *die Bedingungen* (10) *erfüllt sind, so bilden die Achsen des natürlichen Koordinatensystems unter einander gleiche Winkel von dem Kosinus* (11) *und ist in den auf dieses System bezogenen Gleichungen* § 19, (17):

$$a = b = c. \tag{13}$$

4. Allgemeine und besondere gleichwinklige kub. Hyperbeln. Mit (10) sind die Bedingungen § 10, (36) erfüllt:

I. *Der Mittelpunktskegelschnitt der gleichwinkligen kub. Hyperbel ist ein Kreis.*

Fügt man zu den Bedingungen (10) noch die weitere:

$$a'' = 0 \tag{14}$$

hinzu ($\alpha = \beta = \gamma = -1:8$), so erhält man die Bedingungen § 10, (42).

II. *Bei dem besonderen Falle* (14) *der gleichwinkligen kub. Hyperbel*[1]) *sind alle Achsenkegelschnitte gleichseitige Hyperbeln.*

Die Scheitelschmiegungsebenen § 20, (14) mit den Stellungskosinus $1, -1:8, -1:8$ sind dann senkrecht zu den Achsen x, y, z, also auch zu den Asymptoten.[2])

III. In einem andern besonderen Falle, wo neben (10):

$$ae^2 + a'' = 0 \tag{15}$$

ist die *gleichwinklige* kub. Hyperbel nach (11) zugleich ein Sonderfall der *gleichseitigen* kub. Hyperbel (1). Ihr *Parallelepipedon* § 20, 3 wird dann ein *Würfel.*

5. Hauptachse und Hauptebene. Die allgemeine gleichwinklige kub. Hyperbel ist durch die Gleichungen § 19, (17) dargestellt mit

1) H. Krüger, Zeitschr. Math. Phys. 38 (1893) S. 348. 2) ebd. S. 349.

der Beziehung (13) der Konstanten a, b, c und der weiteren Bedingung, daß die Achsen des natürlichen Systems $Oxyz$ nach (11) gleiche Winkel miteinander bilden. Die Betrachtungen des § 20 finden somit unmittelbar Anwendung, jedoch treten einige besondere Beziehungen hervor.

In bezug auf das *schiefwinklige* System $Oxyz$ sind die Richtungskosinus λ, μ, ν der Normale der Hauptebene § 20, (20):

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}, \tag{16}$$

dagegen die der Hauptachse § 20, (22), welche den Anfangspunkt O mit dem unendlich fernen Punkt § 20, (21) verbindet:

$$\lambda : \mu : \nu = a + \gamma b + \beta c : \gamma a + b + \alpha c : \beta a + \alpha b + c. \tag{17}$$

Sollen beide Geraden gleiche Richtung haben, muß:

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = a + \gamma b + \beta c : \gamma a + b + \alpha c : \beta a + \alpha b + c$$

oder:

$$a^2 + \beta ca + \gamma ab = b^2 + \gamma ab + \alpha bc = c^2 + \alpha bc + \beta ca. \tag{18}$$

Diese Bedingung ist im Falle (11), (13) erfüllt:

Die Hauptachse der gleichwinkligen kub. Hyperbel:

$$x : y : z = 1 : 1 : 1 \tag{19}$$

ist die Normale ihrer Hauptebene:

$$x + y + z = 0 \tag{20}$$

im Punkte O, also nach § 20, **12** *auch die Hauptachse des linearen Komplexes der Tangenten* (II § 87, 4).

6. **Die Doppelpyramidengruppe.** Die nicht homogenen Koordinaten eines Punktes λ der gleichwinkligen kub. Hyperbel sind nach § 20, (26):

$$x = a\lambda, \quad y = -a\frac{\lambda + 3}{\lambda - 1}, \quad z = a\frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}, \tag{21}$$

und alsdann die Koordinaten der Ecken des entsprechenden *Sechsecks* § 20, **17**:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1, y_1, z_1 = x, y, z; & x_3, y_3, z_3 = y, z, x; \\ x_2, y_2, z_2 = -x, -z, -y; & y_4, y_4, z_4 = -z, -y, -x; \\ \multicolumn{2}{c}{x_5, y_5, z_5 = z, x, y;} \\ \multicolumn{2}{c}{x_6, y_6, z_6 = -y, -x, -z.} \end{array}\right. \tag{22}$$

Die Kurve behält daher dieselbe Gestalt und Lage gegen *sechs verschieden liegende, aber kongruente schiefwinklige Koordinatensysteme,*

die aus $Oxyz$ entstehen durch zyklische Vertauschung der drei Achsen oder durch Vertauschung zweier Achsen mit gleichzeitiger Umkehr aller drei Pfeilspitzen. Die sechs Systeme haben alle den gleichen Orientierungssinn (I § 32, 8).

Die Kurve geht durch die Gruppe dieser sechs Vertauschungen in sich über. Die Hauptebene (20) und Hauptachse (19) bleiben dabei immer erhalten.

7. Das Flächenbündel. Das Bündel aller durch die Kurve gehenden Flächen 2. O. ist nach § 20, (40):

$$\begin{aligned}(23)\quad & \varrho yz + \sigma zx + \tau xy - a(\sigma - \tau)x - a(\tau - \varrho)y - a(\varrho - \sigma)z \\ & + 3a^2(\varrho + \sigma + \tau) = 0.\end{aligned}$$

Hier ist eine zyklische Vertauschung der drei Parameter ϱ, σ, τ gleichwertig mit einer solchen der x, y, z und eine Vertauschung zweier Parameter, etwa σ, τ gleichwertig mit einer Vertauschung von x, y, z mit $-x, -z, -y$. Die sechs Flächen (23), die den Permutationen von ϱ, σ, τ entsprechen, haben daher in den sechs entsprechenden Koordinatensystemen **6** je ein und dieselbe Gleichung oder:

Je sechs, den sechs Permutationen eines Systems von Parameterwerten ϱ, σ, τ entsprechende Flächen des Bündels sind kongruent.

Die Fläche (23) wird nach § 20, (42) für:

$$(24)\qquad \sigma\tau + \tau\varrho + \varrho\sigma = 0$$

der Sehnenkegel des Punktes:

$$(25)\qquad \lambda = 2\frac{\varrho}{\sigma} + 1 = -2\frac{\varrho}{\tau} - 1.$$

Durch zyklische Vertauschungen der drei Parameter ϱ, σ, τ entstehen aber aus (25) mit Rücksicht auf (24) die Werte:

$$\lambda,\quad -\frac{\lambda + 3}{\lambda - 1},\quad \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}$$

und durch Vertauschung zweier Parameter außerdem die entgegengesetzten dieser drei Werte oder mit Rücksicht auf § 20, (33):

Die Sehnenkegel von je sechs zu einem Sechseck der Form § 20, **17** *zusammengehörigen Kurvenpunkten sind kongruent.*

Im Falle der *Scheitelkegel* $\varrho, \sigma, \tau = -1, 2, 2;\ 2, -1, 2;\ 2, 2, -1$ oder $\lambda = 0;\ -3;\ 3$ bleiben von den sechs kongruenten Kegeln nur drei übrig:

$$(26)\qquad \begin{cases} -yz + 2zx + 2xy - 3ay + 3az + 9a^2 = 0, \\ -zx + 2xy + 2yz - 3az + 3ax + 9a^2 = 0, \\ -xy + 2yz + 2zx - 3ax + 3ay + 9a^2 = 0: \end{cases}$$

ebenso im Falle der drei *hyperbolischen Zylinder* $\varrho, \sigma, \tau = 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1$ oder $\lambda = \infty, 1, -1$:

$$(27) \quad yz + ay - az + 3a^2 = 0, \quad zx + az - ax + 3a^2 = 0,$$
$$xy + ax - ay + 3a^2 = 0.$$

8. Gleichseitige Flächen. Die allgemeine Bedingung gleichseitiger Flächen 2. O. im schiefwinkligen System (II § 100, (13); § 91 (16)):

$$a_{11}(1-\alpha^2) + a_{22}(1-\beta^2) + a_{33}(1-\gamma^2) + 2a_{23}(\beta\gamma - \alpha)$$
$$+ 2a_{31}(\gamma\alpha - \beta) + 2a_{12}(\alpha\beta - \gamma) = 0$$

kommt für die Fläche (23) mit Rücksicht auf (11) für $\alpha \neq 0$ zurück auf:

$$(28) \quad a_{23} + a_{31} + a_{12} = 0 \text{ oder } \varrho + \sigma + \tau = 0.$$

Alle gleichseitigen Bündelflächen gehen durch den Mittelpunkt O der Kurve und alle durch den Mittelpunkt gehenden Bündelflächen sind gleichseitig.

Zu diesen Flächen gehören die *drei kongruenten hyperbolischen Paraboloide* $\varrho, \sigma, \tau = 0, 1, -1; -1, 0, 1; 1, -1, 0$:

$$(29) \quad zx - xy - 2ax + ay + az = 0, \quad xy - yz - 2ay + az + ax,$$
$$yz - zx - 2az + 2ax + 2ay = 0,$$

auf denen nach § 20, (38) die von den drei Scheiteldurchmessern halbierten Sehnen liegen.

Im Falle 4, III, wo $\alpha = 0$, sind alle Bündelflächen gleichseitig.

9. Rotationsflächen. Durch die gleichwinklige kub. Hyperbel gehen *vier Rotationsflächen*, deren Parameter nach § 20, (54) bis auf den gemeinsamen Faktor a^2 die Werte haben:

$$\varrho, \sigma, \tau = 1-\alpha, 1-\alpha, 1-\alpha; \; 1-\alpha, -(1+\alpha), -(1+\alpha);$$
$$-(1+\alpha), 1-\alpha, -(1+\alpha); \; -(1+\alpha), -(1+\alpha), 1-\alpha.$$

Die Gleichungen der vier Rotationsflächen lauten nach (23):

$$(30) \quad yz + zx + xy + 9a^2 = 0;$$

$$(31) \begin{cases} (1-\alpha)yz - (1+\alpha)zx - (1+\alpha)xy + 2ay - 2az - 3a^2(1+3\alpha) = 0, \\ (1-\alpha)zx - (1+\alpha)xy - (1+\alpha)yz + 2az - 2ax - 3a^2(1+3\alpha) = 0, \\ (1-\alpha)xy - (1+\alpha)yz - (1+\alpha)zx + 2ax - 2ay - 3a^2(1+3\alpha) = 0. \end{cases}$$

Die drei Flächen (31) bilden eine Gruppe von drei kongruenten Flächen, die den Permutationen der Parameter ϱ, σ, τ entspricht; ihre Mittelpunkte:

$$(32) \quad x_0, y_0, z_0 = 0, \frac{2a}{1-\alpha}, -\frac{2a}{1-\alpha}; \; -\frac{2a}{1-\alpha}, 0, \frac{2a}{1-\alpha}; \; \frac{2a}{1-\alpha}, -\frac{2a}{1-\alpha}, 0$$

liegen in der Hauptebene (20).

Die Rotationsfläche (30) *hat den Mittelpunkt der kub. Hyperbel als Mittelpunkt und geht bei den sechs Vertauschungen der Doppelpyramidengruppe* (22) *jedesmal in sich über.*

Ihre Kreisschnittebenen sind nach § 20, (52) der Hauptebene (20) parallel.

§ 22. Die kub. hyperbolische Parabel.

1. Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten. Bezogen auf ein *rechtwinkliges* System $Oxyz$ hat die *kub. hyperbolische Parabel* nach § 6, (14); (18); § 7, (11) die *Parameterdarstellung:*

$$x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda,\ y = b\lambda^2 + b'\lambda,\ z = c\lambda,\ t = \lambda - e; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u = -bce,\ v = ce(3a\lambda + a'), \\ w = ab\lambda^3 - 3abe\lambda^2 - 3ab'e\lambda - (a'b' - a''b)e,\ s = -abc\lambda^3. \end{gathered} \tag{2}$$

Sie ist nach § 6, (16); (17) der übrige Durchschnitt des *hyperbolischen Zylinders:*

$$(be + b')z^2 - cyz + c^2yt - b'czt = 0 \tag{3}$$

und des *Kegels:*

$$ac^2y^2 + (a'b - 2ab')cyz + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2)z^2 - b^2czx = 0, \tag{4}$$

abgesehen von der beiden gemeinsamen x-Achse.

Charakteristisch für die Lage beider Flächen ist nach § 6, 8, daß *die Tangentialebene* $z = 0$ (§ 11, (24)) *des Kegels* (4) *längs der x-Achse zu der einen Asymptotenebene des Zylinders* (3) *parallel ist* (Fig. 18, S. 25 gibt den Durchschnitt beider Flächen in einer zur Achse des Zylinders senkrechten Ebene $O'y'z'$).

2. Fehlender Scheitelpunkt. Das gewählte System $Oxyz$ mit dem Punkte $\lambda = 0$ der Kurve als Anfangspunkt, ist kein ausgezeichnetes. Verschiebt man es parallel mit sich selbst nach irgendeinem anderen Punkte $O_0 = x_0, y_0, z_0\ (\lambda_0)$ der Kurve durch die Substitution § 11, (10), so bleibt die Form der Parameterdarstellung nach § 11, (14) dieselbe. Die Kurve § 11, (14) ist im neuen System O_0XYZ wieder wie in (3) und (4) der Durchschnitt des Zylinders:

$$(be_0 + b_0')Z^2 - c_0YZ + c_0^2YT - b_0'c_0ZT = 0 \tag{5}$$

und des Kegels:

$$ac_0^2Y^2 + (a_0'b - 2ab_0')c_0YZ + (ab_0'^2 - a_0'bb_0' + a_0''b^2)Z^2 - b^2c_0ZX = 0 \tag{6}$$

Die Gleichung (5), die nach § 11, (15) auch in der Form:

$$(be + b')Z^2 - cYZ + \frac{c^2e}{e - \lambda_0}YT + \frac{b\lambda_0^2 - 2be\lambda_0 - b'e}{e - \lambda_0}cZT = 0$$

geschrieben werden kann, stellt denselben Zylinder dar, wie die Gleichung (3). Während aber (4) der Sehnenkegel des Punktes $\lambda = 0$ war, ist (6) der Sehnenkegel des Punktes λ_0. Wiederum ist die Tangentialebene $Z = 0$ des Kegels (6) längs der X-Achse der einen Asymptotenebene des Zylinders (5) parallel:

Alle Sehnenkegel der kub. hyperbolischen Parabel (1) *haben längs ihrer gemeinsamen Erzeugenden mit dem hyperbolischen Zylinder* (3) *parallele Tangentialebenen, parallel mit einer Asymptotenebene des Zylinders.*

Nach § 11, 4 entspricht die Gleichberechtigung aller Punkte der Kurve dem Fehlen eines *Scheitelpunktes.* Auch ein *Scheiteldurchmesser* ist nicht vorhanden.

3. Der Achsendurchmesser. Dagegen ist nach § 11, 9 die *Mittelpunktsachse des hyperbolischen Zylinders* (3) mit $t = 1$:

$$y = 2be + b', \quad z = c \tag{7}$$

ein *Achsendurchmesser der kub. hyperbolischen Parabel.* Er halbiert alle Sehnen, zwischen deren Endpunktsparametern λ und λ' die Beziehung besteht:

$$\lambda + \lambda' = 2e. \tag{8}$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes einer solchen Sehne sind alsdann:

$$x = 4ae^2 + 2a'e + a'' - a\lambda\lambda', \quad y = 2be + b', \quad z = c. \tag{9}$$

4. Die Asymptote. Zu den vom Achsendurchmesser halbierten Sehnen ist die *Asymptote* § 8, (38):

$$\begin{cases} bcx - (2ae + a')cy + (abe^2 + 2ab'e + a'b' - a''b)z = 0, \\ \qquad cy - (be + b')z - bcet = 0 \end{cases} \tag{10}$$

zu rechnen, da sie als Sehne der Punkte $\lambda = e$, $\lambda' = e$ der Bedingung (8) entspricht.

Ihr Schnittpunkt mit dem Achsendurchmesser ist daher nach (9):

$$x_0 = 3ae^2 + 2a'e + a'', \quad y_0 = 2be + b', \quad z_0 = c, \quad t_0 = 1. \tag{11}$$

Sie liegt auf dem *parabolischen Zylinder* § 9, (17), der durch die Kurve geht.

Ihre *Richtungskosinus* sind, da sie durch den unendlich fernen Punkt $\lambda = e$ (§ 14, (35)) hindurchgeht:

$$\alpha_3 = \frac{ae^2 + a'e + a''}{p}, \quad \beta_3 = \frac{be + b'}{p}, \quad \gamma_3 = \frac{c}{p}; \tag{12}$$
$$p = \sqrt{(ae^2 + a'e + a'')^2 + (be + b')^2 + c^2}.$$

5. Die beiden Asymptotenebenen. Die beiden *Asymptotenebenen der Kurve* (1), die Schmiegungsebenen in den Punkten $\lambda = \infty$ und $\lambda = e$, haben nach § 7, (27) die Gleichungen:

$$(13)\quad z = ct;\; bcx - (3ae + a')cy + (2abe^2 + 3ab'e + a'b' - a''b)z + abce^2t = 0.$$

Die erste Ebene ist nach § 9, **13**, III die eine Asymptotenebene des hyperbolischen Zylinders (3) und geht als solche durch die Mittelpunktsachse (7); die zweite aber ist die Tangentialebene des parabolischen Zylinders § 9, (17) längs der Asymptote (10) und geht als solche durch die Asymptote.

Die *Schnittlinie der beiden Asymptotenebenen*, die somit durch den Punkt (11) geht, hat die Richtungskosinus:

$$(14)\qquad \alpha_2 = \frac{3ae + a'}{q},\; \beta_2 = \frac{b}{q},\; \gamma_2 = 0;\; q = \sqrt{(3ae + a')^2 + b^2}.$$

6. Das natürliche Koordinatensystem der kub. hyperbolischen Parabel. Wir führen nun ein *schiefwinkliges Koordinatensystem* $\Omega\xi\eta\zeta$ ein, dessen Anfangspunkt $\Omega = x_0, y_0, z_0$ *der Schnittpunkt* (11) *von Achsendurchmesser und Asymptote,* dessen ξ-Achse *der Achsendurchmesser* (7), dessen η-Achse *die Schnittlinie der beiden Asymptotenebenen* (13) und dessen ζ-Achse *die Asymptote* selbst ist.

Da der Achsendurchmesser (7) die Richtungskosinus:

$$(15)\qquad \alpha_1 = 1,\; \beta_1 = 0,\; \gamma_1 = 0$$

hat, ist die Determinante der neun Richtungskosinus (15), (14), (12) $\Delta = bc : pq$ immer von Null verschieden. Ihre durch Δ geteilten Unterdeterminanten sind:

$$(16)\begin{cases} \dfrac{A_1}{\Delta} = 1,\; \dfrac{B_1}{\Delta} = -\dfrac{3ae + a'}{b},\; \dfrac{\Gamma_1}{\Delta} = \dfrac{2abe^2 + 3ab'e + a'b' - a''b}{bc}; \\ \dfrac{A_2}{\Delta} = 0,\; \dfrac{B_2}{\Delta} = \dfrac{q}{b},\; \dfrac{\Gamma_2}{\Delta} = -\dfrac{be + b'}{bc}q;\; \dfrac{A_3}{\Delta} = 0,\; \dfrac{B_3}{\Delta} = 0,\; \dfrac{\Gamma_3}{\Delta} = \dfrac{p}{c}. \end{cases}$$

Damit bestehen zwischen den beiderseitigen Punkt- und Ebenenkoordinaten die Beziehungen (I § 37, (16); § 45, (23)):

$$(17)\begin{cases} \xi = ae^2t + x + \dfrac{B_1}{\Delta}y + \dfrac{\Gamma_1}{\Delta}z, \\ \eta = -eqt \quad + \dfrac{B_2}{\Delta}y + \dfrac{\Gamma_2}{\Delta}z, \\ \zeta = -pt \qquad\quad + \dfrac{\Gamma_3}{\Delta}z, \\ \tau = t; \end{cases}\qquad (18)\begin{cases} u' = u, \\ v' = \alpha_2 u + \beta_2 v, \\ w' = \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w, \\ s' = x_0 u + y_0 v + z_0 w + s. \end{cases}$$

Setzt man nun die Werte (1) in (17), (2) in (18) ein, so ergibt sich, von einem jedesmaligen Proportionalitätsfaktor abgesehen:

$$(19)\quad \begin{cases} \xi = a(\lambda - e)^3, \ \eta = q(\lambda - e)^2, \ \zeta = pe, \ \tau = \lambda - e; \\ u' = \frac{1}{a}, \ v' = -\frac{3}{q}(\lambda - e), \ w' = -\frac{1}{pe}(\lambda - e)^3, \ s' = 3(\lambda - e)^2. \end{cases}$$

7. Punkte und Schmiegungsebenen im natürlichen System. Ändert man schließlich die Bezeichnung:

(20) q, pe; $\lambda - e$; ξ, η, ζ, τ; u', v', w', s' in b, c; λ; x, y, z, t; u, v, w, s,

so folgt:

Im natürlichen schiefwinkligen System $Oxyz$ lautet die Parameterdarstellung der kub. hyperbolischen Parabel:

$$(21)\qquad x = a\lambda^3, \quad y = b\lambda^2, \quad z = c, \quad t = \lambda;$$

$$(22)\qquad u = \frac{1}{a}, \quad v = -\frac{3\lambda}{b}, \quad w = -\frac{\lambda^3}{c}, \quad s = 3\lambda^2.$$

Die nunmehrige x-Achse ist die *Mittelpunktsachse* des hyperbolischen Zylinders, die z-Achse die auf dem parabolischen Zylinder liegende *Asymptote*, die yz- und xy-Ebene sind die beiden *Asymptotenebenen* der Kurve.

8. Sehnen, Achsen und Tangenten. Die Darstellung (21), (22) hat die Form § 7, (2), (12), falls die Bezeichnung:

(23) y_1, y_2, y_3, y_4; v_1, v_2, v_3, v_4 in $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, t, \frac{z}{c}$; au, bv, s, cw

verwandelt wird. Daher folgen sofort aus § 8, (1) und (3) die *Gleichungen der Sehne* $\lambda_1\lambda_2$ und *Achse* $\lambda_1 \times \lambda_2$ *der kub. hyperbolischen Parabel:*

$$(24)\begin{cases} \frac{x}{a} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{y}{b} + \lambda_1\lambda_2 t = 0, \\ \frac{y}{b} - (\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_1\lambda_2\frac{z}{c} = 0; \end{cases} \quad (25)\begin{cases} 3\lambda_1\lambda_2 au + (\lambda_1 + \lambda_2)bv + s = 0, \\ \lambda_1\lambda_2 bv + (\lambda_1 + \lambda_2)s + 3cw = 0. \end{cases}$$

Daraus aber ergeben sich die *Gleichungen der Tangente* λ (§ 8, 5):

$$(26)\begin{cases} \frac{x}{a} - 2\lambda\frac{y}{b} + \lambda^2 t = 0, \\ \frac{y}{b} - 2\lambda t + \lambda^2\frac{z}{c} = 0; \end{cases} \quad (27)\begin{cases} 3\lambda^2 au + 2\lambda bv + s = 0, \\ \lambda^2 bv + 2\lambda s + 3cw = 0, \end{cases}$$

und die *Parameterdarstellung der Strahlenkoordinaten der Tangente:*

$$(28)\quad p_{23} = 2bc\lambda, p_{31} = -3ca\lambda^2, p_{12} = ab\lambda^4, p_{14} = 2a\lambda^3, p_{24} = b\lambda^2, p_{34} = -c.$$

9. Das natürliche Koordinatensystem als Schmiegungstetraeder. Da sich aus (21) für die je drei in den Koordinatenebenen $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $t = 0$ liegenden Kurvenpunkte (§ 4, **3**, I): $\lambda = 0, 0, 0$; $0, 0, \infty$; ∞, ∞, ∞; $0, \infty, \infty$ ergibt, so hat das natürliche System $Oxyz$ als Tetraeder aufgefaßt, die Eigenschaft, daß die beiden Ebenen $x = 0$ und $z = 0$ die Schmiegungsebenen der beiden *unendlich fernen Punkte* $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ (§ 7, **4**), und die beiden Ebenen $y = 0$ und $= 0$ diejenigen Tangentialebenen (§ 7, **3**) in $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ sind, die bezüglich durch $\lambda = \infty$ und $\lambda = 0$ gehen.

Nennt man ein solches durch je zwei Kurvenpunkte bestimmtes Tetraeder ein *Schmiegungstetraeder* der Raumkurve 3. O. (§ 28, **1**), so *ist das natürliche Koordinatensystem das den beiden unendlich fernen Punkten der kub. hyperbolischen Parabel entsprechende Schmiegungstetraeder.* Es gibt *nur ein* solches Schmiegungstetraeder.

10. Flächenbündel und Sehnenkegel. Mittels der Vertauschungen (23) ergibt sich aus § 9, (25) die Gleichung des *Bündels aller durch die Kurve* (21) *gehenden Flächen 2. O.:*

$$\varrho f + \sigma g + \tau h = 0, \tag{29}$$

in der f, g, h nach § 7, (22) die Bedeutung haben:

$$f = \frac{yz}{bc} - t^2, \quad g = \frac{y}{b}t - \frac{zx}{ca}, \quad h = \frac{x}{a}t - \frac{y^2}{b^2}, \tag{30}$$

und ebenso aus § 9, (2) die Gleichung des *Sehnenkegels* im Punkte λ:

$$\lambda^2 f + \lambda g + h = 0. \tag{31}$$

Für $\lambda = \infty$ und $\lambda = 0$ erhält man hieraus, $t = 1$ genommen, *den hyperbolischen* und *den parabolischen Zylinder* der kub. hyperb. Parabel (21):

$$f = \frac{yz}{bc} - 1 = 0; \quad (33) \quad -h = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x}{a} = 0. \tag{32}$$

Die zx- und xy-Ebene sind die *Asymptotenebenen des hyperbolischen Zylinders.*

11. Flächenscharschar und Achsenkegelschnitt. In gleicher Weise folgt mittels (23) aus § 10, (43) und (2) die *Scharschar der von den Ebenen* (22) *berührten Flächen 2. Kl.:*

$$\varrho F + \sigma G + \tau H = 0, \tag{34}$$

wo nach § 7, (24):

$$F = 3aus - b^2v^2, \quad G = 9acuw - bvs, \quad H = 3bcvw - s^2, \tag{35}$$

und der *Achsenkegelschnitt in der Schmiegungsebene* λ:

$$\lambda^2 F + \lambda G + H = 0. \tag{36}$$

Der Mittelpunkt dieses Kegelschnittes hat die Koordinaten:

$$(37) \qquad x = -\frac{3a}{2}\lambda^2, \qquad y = \frac{b}{2}\lambda, \qquad z = 0.$$

Der *Mittelpunktskegelschnitt der kub. hyperb. Parabel* (21) *ist* daher (§ 10, 8) *die Parabel:*

$$(38) \qquad 6\frac{y^2}{b^2} + \frac{x}{a} = 0, \quad z = 0,$$

die nach **9** *in der einen Asymptotenebene,* der Schmiegungsebene des doppelt zählenden unendlich fernen Punktes $\lambda = \infty$ der Raumkurve liegt.

Die Achsenkegelschnitte der beiden Asymptotenebenen selbst haben die mit $\lambda = \infty$ und $\lambda = 0$ aus (36) folgenden Gleichungen:

$$(39) \qquad -F = b^2v^2 - 3aus = 0, \quad H = 3bcvw - s^2 = 0$$

oder in Punktkoordinaten:

$$(40) \qquad 3\frac{y^2}{b^2} - 4\frac{x}{a} = 0, \ z = 0; \quad (41) \quad 4\frac{yz}{bc} - 3 = 0, \ x = 0.$$

Die beiden Parabeln (38) und (40), sowie die Leitparabel des Zylinders (33) in der xy-Ebene haben im Punkte O alle drei dieselbe Tangente $z = 0$, $x = 0$, die Schnittlinie der beiden Asymptotenebenen, und denselben zu ihr konjugierten Durchmesser (II § 14, 8) $y = 0$, $z = 0$, die Mittelpunktsachse des hyperbolischen Zylinders.

Die Hyperbel (41) und die Leithyperbel des Zylinders (32) haben dieselben Asymptoten $x = 0$, $y = 0$ und $x = 0$, $z = 0$.

12. Ort der Sehnen und Achsen λ, $-\lambda$. Die nicht homogene Form der Gleichungen (21) und (22) lautet:

$$(42) \ x = a\lambda^2, \ y = b\lambda, \ z = \frac{c}{\lambda}; \quad (43) \quad u = \frac{1}{3a\lambda^2}, \ v = -\frac{1}{b\lambda}, \ w = -\frac{\lambda}{3c}.$$

Die Punkte λ und $-\lambda$ haben daher die Koordinaten x, y, z, und $x, -y, -z$, so daß ihre Sehne vom Punkte $x, 0, 0$ der x-Achse halbiert wird und der yz-Ebene parallel ist. Die Gleichungen der Sehne $\lambda, -\lambda$ sind nach (24):

$$(44) \qquad \frac{x}{a} - \lambda^2 t = 0, \quad \frac{y}{b} - \lambda^2\frac{z}{c} = 0.$$

Der Ort aller dieser Sehnen, die vom Achsendurchmesser, der Mittelpunktsachse des hyperbolischen Zylinders, halbiert werden, ist das hyperbolische Paraboloid[1]*):*

$$(45) \qquad -g = \frac{zx}{ca} - \frac{y}{b}t = 0.$$

1) Schröter, Oberfl. 2. O. (1882), S. 332.

Die Schmiegungsebenen λ und $-\lambda$ haben nach (43) die Koordinaten u, v, w und $u, -v, -w$; ihre Schnittlinie hat nach (25) in Ebenen- und danach in Punktkoordinaten die Gleichungen:

$$(46) \qquad -3\lambda^2 au + s = 0, \quad -\lambda^2 bv + 3cw = 0;$$

$$(47) \qquad \frac{x}{a} + 3\lambda^2 t = 0, \quad 3\frac{y}{b} + \lambda^2 \frac{z}{c} = 0.$$

Während daher für $a > 0$ alle Sehnen $\lambda, -\lambda$ nach (44) die positive Halbachse x treffen, treffen alle Achsen $\lambda \times -\lambda$ nach (47) die negative Halbachse x. Die z-Achse, die als Asymptote sowohl Sehne als Achse $\lambda = 0$, $\lambda = 0$ ist, trifft im Punkte O.

Der Ort aller Achsen $\lambda, -\lambda$, die nach (47) *der yz-Ebene parallel sind, ist das hyperbolische Paraboloid:*

$$(48) \qquad G = 9cawu - bvs = 0 \quad \textit{oder:} \quad \frac{zx}{ca} - 9\frac{y}{b}t = 0.$$

13. Konstruktion der kub. hyperb. Parabel. Die beiden Gleichungen (32) und (33) des hyperbolischen und parabolischen Zylinders, in Verbindung mit der Gleichung:

$$(49) \qquad \frac{y}{b} = \lambda$$

eines Bündels von Parallelebenen zur zx-Ebene, sind mit der Parameterdarstellung (42) gleichwertig und sind der unmittelbare Ausdruck der Konstruktion der kub. hyperbol. Parabel, wenn in der yz-Ebene eines schiefwinkligen Achsensystems $Oxyz$, der Zeichnungsebene der Fig. 43, die Leithyperbel h des hyperbolischen Zylinders (32) und in der xy-Ebene die Leitparabel p des parabolischen Zylinders (33) gegeben sind (in Fig. 43 ist das System $Oxyz$ rechtwinklig genommen, was an dem Konstruktionsverfahren nichts ändert). Die Ebenen des Büschels (49) gehen alle durch die gemeinsame Erzeugende $y = 0$, $t = 0$ der beiden Zylinder (32) und (33), die Sehne (24) der beiden unendlich fernen Punkte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \infty$ der Kurve (21), enthalten daher je noch einen Punkt der Kurve.

Zwei Ebenen λ und $-\lambda$ des Büschels (49) schneiden die y-Achse in den Punkten J und J' ($OJ = OJ' = b\lambda$). Geht man nun durch J und J' in der yz-Ebene parallel zur z-Achse bis zu den Schnittpunkten H und H' mit der Leithyperbel h und zieht durch H und H' Parallellinien zur x-Achse, so erhält man die Schnittlinien l und l' der Ebenen λ und $-\lambda$ mit dem hyperbolischen Zylinder. Geht man dagegen von J und J' in der xy-Ebene parallel der x-Achse bis zu den Schnittpunkten Q und Q' mit der Leitparabel p und zieht durch

Q und Q' Parallellinien zur z-Achse, so erhält man die Schnittlinien m und m' der Ebenen λ und $-\lambda$ mit dem parabolischen Zylinder. Die Schnittpunkte $l \times m = P$ und $l' \times m' = P'$ sind zwei Punkte λ und $-\lambda$ der Raumkurve (42). Ihre Verbindungslinie PP' wird in M, dem Mittelpunkt der zur y-Achse parallelen Sehne QQ' der Leitparabel selbst, von der x-Achse halbiert. Ebenso erhält man weitere Punktepaare, deren Sehnen von der x-Achse halbiert werden. Diese Sehnen liegen auf dem Paraboloid (45).

Fig. 43.

14. Gestalt der kub. hyperbol. Parabel. Die Raumkurve besteht hiernach aus zwei Zweigen, die man sich in folgender Weise entstanden denken kann: Man zieht in der Leitparabel p des parabolischen Zylinders in der horizontalen xy-Ebene ein System zur y-Achse paralleler Sehnen QQ', die von der x-Achse halbiert werden. Dann verschiebt man die gegenüberliegenden Endpunkte jeder Sehne auf den Erzeugenden m, m' des parabolischen Zylinders soweit nach oben bzw. nach unten, als die parallel der z-Achse gemessene Höhe JH der Leithyperbel in der durch m zur zx-Ebene gelegten Parallelebene beträgt. Die Parabel p wird dann im Scheitelpunkt O zerrissen und unendlich weit nach oben und unten längs der z-Achse hingezogen, während sie andererseits gegen die positive x-Achse hin immer weniger von ihrer ursprünglichen Lage nach oben und unten abweicht.

15. Die Rotationsflächen im natürlichen System. *In der unendlich fernen Ebene* $t = 0$ fallen von dem Dreieck der drei Kurven-

punkte $E_1 E_2 E_3$ zwei Ecken E_2 und E_3 $(\lambda = \infty)$ in die Ecke X des Koordinatendreiecks XYZ, eine Ecke $E_1(\lambda = 0)$ aber in Z. Die Gleichungen der drei Seiten von $E_1 E_2 E_3$, von denen s_1 nach § 13, 7 die Tangente im Punkte $\lambda = \infty$ ist, werden (Fig. 44):

$s_1 : z = 0$ (nach (26)); $s_2 = s_3 :$ $y = 0$.

Die Doppelpunkte der Involution § 14, 6 die auf $s_2 = s_3$ durch die Schnittpunkte S_3, S_3' mit dem Kugelkreis und die Ecken E_1, E_2 bestimmt wird, sind ebenso wie § 20, (51):

$D_2 = D_3 = 1, 0, 1$; $D_2' = D_3' = -1, 0, 1$.

Auf der Seite s_1 erfüllen zwei harmonische Pole $x_1, y_1, 0$ und $x_2, y_2, 0$ des Kugelkreises die Bedingung:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + \gamma(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 0,$$

Fig. 44.

so daß:

$$D_1 = -\gamma,\ 1,\ 0; \qquad D_1' = E_2 = E_3 = 1,\ 0,\ 0$$

harmonische Pole sind. Die beiden Berührungssehnen sind daher wie § 14, 6:

$$D_1 D_2 : x + \gamma y - z = 0, \quad D_1 D_2' : x + \gamma y + z = 0.$$

Damit wird die unendlich ferne Kurve der beiden Rotationsflächen wie § 14, 9:

$$(50) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha yz + 2\beta zx + 2\gamma xy) - (x + \gamma y + \varepsilon z)^2 = 0$$

oder:

$$(51) \qquad (1 - \gamma^2) y^2 + 2(\alpha - \varepsilon\gamma) yz + 2(\beta - \varepsilon) zx = 0, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Sie geht durch den Punkt $Z(x = 0,\ y = 0)$ und berührt die Seite $s_1 (z = 0)$ in X.

Die Gleichungen der beiden durch die kub. hyperb. Parabel gehenden Rotationsflächen gehen daher aus (29) *hervor mit den Werten:*

$$(52) \qquad \varrho = 2bc(\alpha - \varepsilon\gamma), \quad \sigma = -2ca(\beta - \varepsilon), \quad \tau = -b^2(1 - \gamma^2).$$

16. Die rechtwinklige kub. hyperb. Parabel. Nach (15), (14), (12) sind in bezug auf das *ursprüngliche System Oxyz* in **1** die Kosinus der Achsenwinkel des natürlichen Systems:

$$\alpha = \frac{(3ae + a')(ae^2 + a'e + a'') + b(be + b')}{pq}, \quad \beta = \frac{ae^2 + a'e + a''}{p}, \quad \gamma = \frac{3ae + a'}{q}.$$

Das *natürliche System* in **6—15** wird daher *rechtwinklig*[1]), wenn *für die ursprüngliche Darstellung* (1) *die Bedingungen erfüllt sind:*

---

1) F. Lindemann, Vorles. Geom. Raum (1891), S. 251.

(53) $$a' = -3ae, \quad a'' = 2ae^2, \quad b' = -be.$$

Das unendlich ferne Dreieck XYZ des natürlichen Systems (Fig. 44) ist dann ein Polardreieck des Kugelkreises.

Bei dieser besonderen kub. hyperbol. Parabel sind die Asymptotenebenen der Kurve selbst (yz- und xy-Ebene unter 7) und die des hyperbol. Zylinders (32) je untereinander senkrecht und die Asymptote der Kurve (z-Achse in 7) fällt in die Scheitellinie des parabolischen Zylinders (33).

Die Gleichungen (29), (52) *der beiden Rotationsflächen* der Kurve im natürlichen System sind:

(54) $$y^2 - 2\varepsilon z x - b^2 \frac{x}{a} t + 2\varepsilon c a \frac{y}{b} t = 0.$$

§ 23. Die kubische Parabel.

1. Parameterdarstellung im rechtwinkligen System. Bezogen auf ein *rechtwinkliges* System $Oxyz$ wird die kub. Parabel nach § 6, (14); (18); § 7, (11) und § 8, (11) allgemein durch folgende Parameterdarstellung ihrer *Punkte, Schmiegungsebenen* und *Tangenten* gegeben:

(1) $$\begin{cases} x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda, \\ y = b\lambda^2 + b'\lambda, \\ z = c\lambda, \\ t = 1; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} u = bc, \\ v = -(3a\lambda + a')c, \\ w = 3a(b\lambda + b')\lambda + a'b' - a''b, \\ s = -abc\lambda^3; \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} p_{23} = bc\lambda^2, & p_{14} = 3a\lambda^2 + 2a'\lambda + a'', \\ p_{31} = -(2a\lambda + a')c\lambda^2, & p_{24} = 2b\lambda + b', \\ p_{12} = (ab\lambda^2 + 2ab'\lambda + a'b' - a''b)\lambda^2, & p_{34} = c, \end{cases}$$

wo $abc \neq 0$ ist.

2. Durchdringung von Zylinder und Kegel. Die kub. Parabel ist der übrige Durchschnitt des *parabolischen Zylinders:*

(4) $$bz^2 - c^2yt + b'czt = 0$$

und des *Kegels:*

(5) $$ac^2y^2 + (a'b - 2ab')cyz + (ab'^2 - a'bb' + a''b^2)z^2 - b^2czx = 0,$$

die außerdem die x-Achse gemein haben.

Charakteristisch für die Lage beider Flächen ist nach § 6, 8, daß *die Tangentialebene des Kegels längs der gemeinsamen Erzeugenden*, die xy-Ebene, *zur Hauptebene des parabolischen Zylinders parallel ist*

(Fig. 45 gibt den Durchschnitt beider Flächen mit einer zur x-Achse senkrechten Ebene $O'y'z'$, wie Fig. 19, S. 25).

3. Elemente des Anfangspunktes. Die *Tangente* der Kurve (1) im Anfangspunkte $\lambda = 0$:

$$x:y:z = a'':b':c \quad (OT) \tag{6}$$

ist nach § 11, 6, II diejenige Erzeugende des Kegels (5) in der er geschnitten wird von der Tangentialebene Os_0 des Zylinders (Fig. 45) längs der x-Achse.

Die *Schmiegungsebene* im Punkte $\lambda = 0$:

$$c(bx - a'y) + (a'b' - a''b)z = 0 \quad (Ot_1) \tag{7}$$

ist nach § 11, 7 die Tangentialebene des Kegels längs der Erzeugenden (6).

Der *Durchmesser* durch den Punkt $\lambda = 0$:

$$x:y:z = a':b:0 \quad (OS), \tag{8}$$

nach § 11, (30) die Polare der Ebene Os_0 in bezug auf den Kegel, halbiert nach § 11, 8, II alle Sehnen λ, $-\lambda$.

Fig. 45.

4. Unendlich viele Scheitelpunkte. Jedoch sind die Elemente des Anfangspunktes keine ausgezeichneten Elemente der Kurve, da nach § 11, 3, IV jeder Punkt der Kurve als Scheitelpunkt gleichberechtigt ist. In der Tat behalten die Gleichungen (1) ihre Form in § 11, (18) unverändert bei, wenn ein von einem beliebigen Punkte $O_0 = \lambda_0$ der Kurve ausgehendes, dem System $Oxyz$ paralleles System O_0XYZ eingeführt wird. Die Kurve § 11, (18) erscheint wiederum als der Durchschnitt des parabolischen Zylinders:

$$bZ^2 - c^2Y + b_0'cZ = 0 \tag{9}$$

und des Kegels:

$$ac^2Y^2 + (a_0'b - 2ab_0')cYZ + (ab_0'^2 - a_0'bb_0' + a_0''b^2)Z^2 - b^2cZX = 0. \tag{10}$$

Während aber (5) der Sehnenkegel des Punktes $\lambda = 0$ war, ist (10) der Sehnenkegel des Punktes λ_0. Wiederum ist die Tangentialebene $Z = 0$ des Kegels (10) längs der X-Achse der Hauptebene des Zylinders (9) parallel.

Alle Sehnenkegel der kub. Parabel (1) *haben längs ihrer gemeinsamen Erzeugenden mit dem parabolischen Zylinder* (4) *parallele Tangentialebenen, parallel der Hauptebene des Zylinders.*

5. Unendlich viele Scheiteldurchmesser. Wie bei der Darstellung (1) zum Punkte $\lambda = 0$ der Durchmesser (8), so gehört auch

bei der Darstellung § 11, (18) zum Punkte $\mu = 0$ oder $\lambda = \lambda_0$ der Durchmesser:

$$(11)\qquad X : Y : Z = a_0' : b : 0 = 3a\lambda_0 + a' : b : 0$$

oder im System $Oxyz$ dargestellt nach § 11, (10) mit Benutzung der für $\lambda = \lambda_0$ gebildeten Werte (1):

$$(12)\quad (3a\lambda_0 + a')y - bx - (2ab\lambda_0^3 + 3ab'\lambda_0^2 + (a'b' - a''b)\lambda_0) = 0, \quad z = c\lambda_0.$$

Bei der kub. Parabel (1) *gehört zu jedem Punkte* λ_0 *ein Scheiteldurchmesser* (12). Er ist nach § 11, (30) die Polare der Tangentialebene des parabolischen Zylinders (4), längs der gemeinsamen Erzeugenden mit dem Sehnenkegel λ_0, in bezug auf diesen Kegel und *halbiert alle Sehnen* $\lambda\lambda'$, für die:

$$(13)\qquad \lambda + \lambda' = 2\lambda_0.$$

Alle Durchmesser sind nach der zweiten Gleichung (12) *der Hauptebene des parabolischen Zylinders parallel.*[1])

6. Ort der halbierten Sehnen. Die der Bedingung (13) entsprechenden Sehnen $\lambda\lambda'$ haben nach § 8, (2) die Gleichungen:

$$(14)\quad \begin{cases} bcx - (2a\lambda_0 + a')cy + (2ab'\lambda_0 + a'b' - a''b)z + ab\lambda\lambda' z = 0, \\ \qquad cy - (2b\lambda_0 + b')z + bc\lambda\lambda' t = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\lambda\lambda'$ ergibt sich als *Ort der Sehnen, die vom Durchmesser des Punktes* λ_0 *halbiert werden, das hyperbolische Paraboloid*:

$$(15)\quad \begin{cases} a(2b\lambda_0 + b')z^2 - acyz + bc^2xt - (2a\lambda_0 + a')c^2yt. \\ \qquad + (2ab'\lambda_0 + a'b' - a''b)czt = 0. \end{cases}$$

7. Paraboloide im Bündel. Das Bündel aller durch die Kurve (1) gehenden Flächen 2. O. ist nach § 9, (25):

$$(16)\qquad \varrho f + \sigma g + \tau h = 0,$$

wo $f : ab$ und h die linken Seiten der Gleichungen (4) und (5) und g nach § 9, (3) bedeutet:

$$(17)\quad g = -abcyz + abb'z^2 + b^2c^2xt - a'bc^2yt + (a'b' - a''b)bczt.$$

Die Determinante der unendlich fernen Kurve der Fläche (16) ist, da im Sinne von § 9, (5) $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$ ist:

$$A_{44} = -a_{22}a_{31}^2 = -\tfrac{1}{4}ab^4c^4\tau^3.$$

1) v. Drach, Kub. Kegelschn. (1867), S. 68.

Die Fläche (16) ist daher mit Rücksicht auf § 9, (32) ein hyperbolisches Paraboloid für $\tau = 0$, $\sigma \neq 0$; wir setzen etwa $\rho = 2\lambda_0$, $\sigma = 1$: *Alle im Bündel* (16) *enthaltenen hyperbolischen Paraboloide bilden den Büschel*:

$$(18) \qquad 2\lambda_0 f + g = 0.$$

Sie haben alle, außer der Raumkurve selbst, deren unendlich ferne Tangente $z = 0$, $t = 0$ (§ 8, (39)) gemein.

Die Gleichung (18) ist identisch mit (15), so daß jedes Paraboloid des Büschels (18) die von einem Durchmesser halbierten Sehnen enthält.

8. Einfachste Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten. Wählt man für die Darstellung § 11, (18):

$$(19) \qquad \lambda_0 = -\frac{b'}{2b},$$

so wird nach § 11, (19): $b_0' = 0$. Man kann daher, indem man den Punkt (19) von vornherein als Anfangspunkt O genommen denkt, in (1) ohne Beschränkung annehmen, daß:

$$(20) \qquad b' = 0.$$

Die kub. Parabel kann in bezug auf ein rechtwinkliges System $Oxyz$ *immer durch die Gleichungen dargestellt werden*:

$$(21) \qquad x = a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda, \quad y = b\lambda^2, \quad z = c\lambda;$$

$$(22) \qquad u = bc, \quad v = -(3a\lambda + a')c, \quad w = (3a\lambda^2 - a'')b, \quad s = -abc\lambda^3.$$

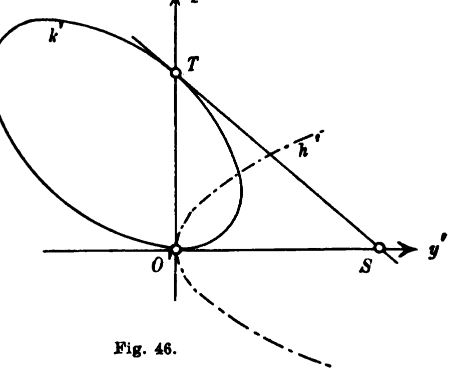


Fig. 46.

Sie ist dann der Durchschnitt des parabolischen Zylinders und Kegels:

$$(23) \quad bz^2 - c^2yt = 0; \qquad (24) \quad ac^2y^2 + a'bcyz + a''b^2z^2 - b^2czx = 0.$$

Die x-Achse ist die Scheitelerzeugende des parabolischen Zylinders und O der auf ihr liegende (endliche) Kurvenpunkt (Fig. 46),

9. Das natürliche Koordinatensystem der kub. Parabel. Für die Kurve (1) bildet die vom *Scheitelpunkt* O ausgehende x-*Achse*, der *Scheiteldurchmesser* (8) und die *Scheiteltangente* (6) das in § 11, 1 eingeführte schiefwinklige System der Scheitelelemente, für welches die Gleichungen § 12, (6); (7); (11) gelten. Da aber nach 4 jeder Punkt Scheitelpunkt ist, so folgt:

Zu jedem beliebigen (endlichen) Punkte O der kub. Parabel als Scheitel gehört ein bestimmtes schiefwinkliges System Oxyz, in bezug auf das die Parameterdarstellungen der Kurve lauten:

$$(25) \qquad x = a\lambda^3, \quad y = b\lambda^2, \quad z = c\lambda, \quad t = 1;$$

$$(26) \qquad u = \frac{1}{a}, \quad v = -\frac{3\lambda}{b}, \quad w = \frac{3\lambda^2}{c}, \quad s = -\lambda^3;$$

$$(27) \qquad \begin{cases} p_{23} = bc\lambda^2, & p_{31} = -2ca\lambda^3, & p_{12} = ab\lambda^4, \\ p_{14} = 3a\lambda^2, & p_{24} = 2b\lambda, & p_{34} = c. \end{cases}$$

Die Ebenen $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $t = 0$ enthalten nach (25) die Kurvenpunkte $\lambda = 0, 0, 0; 0, 0, \infty; 0, \infty, \infty; \infty, \infty, \infty$; die Ebenen $x = 0$ und $t = 0$ sind also die Schmiegungsebenen in den Punkten $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ diejenigen Tangentialebenen in beiden Punkten, die je durch den anderen gehen.

Das eingeführte „natürliche“ System $Oxyz$ ist daher nach § 22, 9 *das den Punkten $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ entsprechende Schmiegungstetraeder.* Es gibt, da $\lambda = 0$ ein beliebiger Punkt ist, *unendlich viele* solche Schmiegungstetraeder.

Die y-Achse, als Scheiteldurchmesser, halbiert alle Sehnen $\lambda, -\lambda$.

10. Flächenbündel und Scharschar. Nach § 12, 5 ist das Bündel aller durch die Kurve (25) gehenden Flächen 2. O. und die Scharschar aller von den Ebenen (26) berührten Flächen 2. Kl.:

$$(28) \qquad \varrho f + \sigma g + \tau h = 0; \qquad (29) \qquad \varrho F + \sigma G + \tau H = 0,$$

wo:

$$(30) \qquad f = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y}{b}t, \quad -g = \frac{y}{b}\frac{z}{c} - \frac{x}{a}t, \quad h = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c}\frac{x}{a};$$

$$(31) \qquad F = b^2v^2 - 3cawu, \quad G = bcvw - 9aus, \quad H = c^2w^2 - 3bvs.$$

Die Gleichungen:

$$(32) \qquad f = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y}{b} = 0, \qquad h = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c}\frac{x}{a} = 0$$

stellen *den parabolischen Zylinder* und *den zum Punkte $\lambda = 0$ gehörigen Sehnenkegel dar* und:

$$(33) \qquad F = b^2v^2 - 3cawu = 0, \qquad H = c^2w^2 - 3bvs = 0$$

den Achsenkegelschnitt der unendlich fernen Schmiegungsebene und derjenigen des Punktes $\lambda = 0$.

11. Konstruktion der kub. Parabel. Die beiden Gleichungen (32) in Verbindung mit der Gleichung:

$$(34)\qquad \frac{y}{b} - \lambda\frac{z}{c} = 0$$

sind der Parameterdarstellung (25) gleichwertig und enthalten die Konstruktion der kub. Parabel, wenn in der zur yz-Ebene parallelen $y'z'$-Ebene $x = a$ eines schiefwinkligen Achsensystems $Oxyz$ die Leitparabel h des parabolischen Zylinders $f = 0$ und die Leitparabel k des Kegels $h = 0$ gegeben sind. In (34) hat man dann einen Büschel von Ebenen, die durch die x-Achse die gemeinsame Erzeugende der Flächen (32), hindurchgehen.

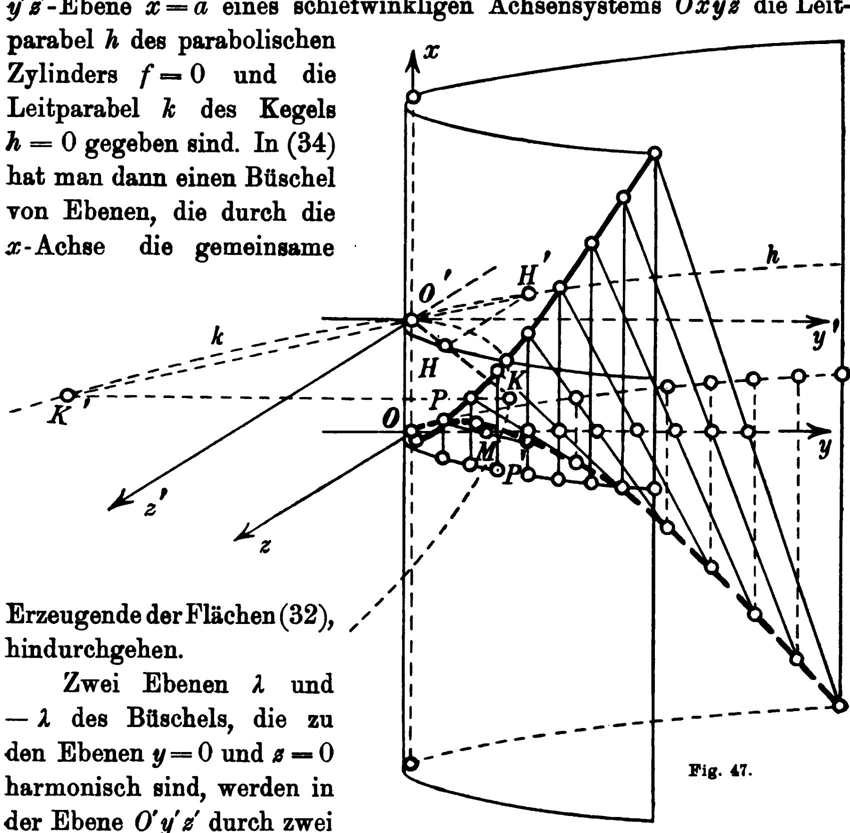


Fig. 47.

Zwei Ebenen λ und $-\lambda$ des Büschels, die zu den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ harmonisch sind, werden in der Ebene $O'y'z'$ durch zwei Strahlen durch O' bezeichnet, welche die Kurven h und k in H, H' und K, K' schneiden (Fig. 47). Indem man durch H, H' Parallelen zur x-Achse zieht und K, K' mit O verbindet (in Fig. 47 sind diese Linien hinzuzudenken), erhält man die in den Ebenen λ, λ' liegenden Erzeugenden von Zylinder und Kegel und in deren Schnittpunkten P, P' zwei Punkte der Kurve. Ihre Sehne PP' wird in M von dem Durchmesser des Punktes O, der y-Achse, halbiert. In Fig. 47 sind für weitere Punktepaare $\lambda, -\lambda$ die von der y-Achse halbierten Sehnen gezogen; zu diesen Sehnen gehört die z-Achse, die Tangente der Raumkurve im Punkte O.

12. Der Parallelkegel. Für die folgenden Betrachtungen legen wir *die vereinfachte Darstellung* (21) *der allgemeinen kub. Parabel in*

rechtwinkligen Koordinaten zugrunde. Zu (21) treten neben (22) noch die mit $b' = 0$ verkürzten Formeln (3).

Zieht man durch den Anfangspunkt O Parallelstrahlen zu allen Tangenten der Kurve, so entsteht ein Kegel, der kurz als *Parallelkegel* bezeichnet werden soll. Für einen Punkt x, y, z dieses Kegels ist nach (3) (I § 48, (19)):

$$(35) \qquad x : y : z = 3a\lambda^2 + 2a'\lambda + a'' : 2b\lambda : c.$$

Durch Elimination von λ ergibt sich als Gleichung des Parallelkegels:

$$(36) \qquad 3ac^2y^2 + 4a''b^2z^2 + 4a'bcyz - 4b^2czx = 0.$$

Es ist also ein *Kegel 2. O.* Seine Gleichung in Ebenenkoordinaten des Bündels (I § 49, 5; II § 80, (12)) lautet:

$$(37) \qquad (a'^2 - 3aa'')u^2 + b^2v^2 - 3cawu + 2a'buv = 0.$$

Zieht man andererseits durch O Parallelebenen zu allen Schmiegungsebenen der Kurve, so ist für eine solche Parallelebene nach (22):

$$(38) \qquad u : v : w = bc : -(3a\lambda + a')c : (3a\lambda^2 - a'')b.$$

Hieraus folgt aber durch Elimination von λ die Gleichung (37):

I. *Legt man durch den Punkt O Parallelstrahlen zu allen Tangenten und Parallelebenen zu allen Schmiegungsebenen der kub. Parabel* (21), *so sind die einen die Erzeugenden und die anderen die Tangentialebenen desselben Kegels* (37), (38).[1]

Da der Parallelkegel (37) unter der Bedingung:

$$(39) \qquad a'^2 - 3aa'' + b^2 = 0$$

dual gleichseitig (II § 71, (30)) ist, so folgt:

II. *Bei der kub. Parabel* (21) *gibt es entweder keine drei zueinander senkrechten Schmiegungsebenen oder, falls die Bedingung* (39) *erfüllt ist unendlich viele Systeme solcher.*[2]

Es gehören dann zu jeder Schmiegungsebene zwei zu ihr und untereinander senkrechte.

13. Senkrechte Schmiegungsebenen. Sollen überhaupt zwei Schmiegungsebenen λ_0 und λ zueinander senkrecht sein, muß nach (22):

$$(40) \qquad b^2c^2 + (3a\lambda_0 + a')(3a\lambda + a')c^2 + (3a\lambda_0^2 - a'')(3a\lambda^2 - a'')b^2 = 0$$

oder nach λ geordnet:

---

1) H. Schröter, Oberflächen 2. O. (1880), S. 307.

2) O. Böklen, Zeitschr. Math. Phys. 29 (1884), S. 378; F. Meyer, ebd. 30 (1885), S. 345.

$$(41)\qquad 3ab^2(3a\lambda_0^2 - a'')\lambda^2 + 3ac^2(3a\lambda_0 + a')\lambda + b^2c^2 + a'c^2(3a\lambda_0 + a') - a''b^2(3a\lambda_0^2 - a'') = 0.$$

Zu einer Schmiegungsebene λ_0 gibt es zwei Senkrechte λ_1 und λ_2, für die:

$$(42)\qquad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{3ac^2(3a\lambda_0 + a')}{3ab^2(3a\lambda_0^2 - a'')},$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{b^2c^2 + a'c^2(3a\lambda_0 + a') - a''b^2(3a\lambda_0^2 - a'')}{3ab^2(3a\lambda_0^2 - a'')}.$$

Sollen auch λ_1 und λ_2 untereinander senkrecht sein, was einschließt, daß sie reell sind, so muß nach (40) die Bedingung:

$$(43)\qquad b^2c^2 + (3a\lambda_1 + a')(3a\lambda_2 + a')c^2 + (3a\lambda_1^2 - a'')(3a\lambda_2^2 - a'')b^2 = 0$$

erfüllt sein, die sich nach Einsetzen der Werte (42) auf die Form bringen läßt:

$$(44)\qquad \{(3a\lambda_0 - a'')^2b^2 + (3a\lambda_0 + a')^2c^2 + b^2c^2\}(a'^2 - 3aa'' + b^2) = 0,$$

die im allgemeinen für kein λ_0 erfüllt ist, unter der Bedingung (39) aber für jedes λ_0, so daß wieder der Satz 12, II folgt.

14. Ort der Schnittpunkte. Für den Schnittpunkt x, y, z, t der drei Schmiegungsebenen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ ist nach § 7, (18) mit $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$; $b' = 0$:

$$(45)\qquad \frac{3x}{t} = 3a\lambda_0\lambda_1\lambda_2 + a'(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2) + a''(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2),$$

$$\frac{3y}{t} = b(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2), \qquad \frac{3z}{t} = c(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2).$$

Mit Einsetzung der Werte (42) ergibt sich aber unter der Bedingung (39), daß unabhängig von λ_0:

$$(46)\qquad 3\frac{x}{t} = -\frac{a'a''}{3a}, \quad 3\frac{y}{t} = -\frac{3ac^2 + a''b^2}{3ab}.$$

Der Ort der Schnittpunkte dreier rechtwinkligen Schmiegungsebenen der speziellen kub. Parabel (21), (39) *ist die zur Hauptebene des parabolischen Zylinders* (23) *senkrechte gerade Linie* (46), *die Direktrix der speziellen kub. Parabel.*[1])

Die Gleichung einer Ebene, die durch die Direktrix (46) senkrecht zur Schmiegungsebene λ:

$$(47)\qquad bcx - (3a\lambda + a')cy + (3a\lambda^2 - a'')bz - abc\lambda^3 = 0$$

---

1) O. Böklen, Zeitschr. Math. Phys. 29 (1884), S. 379; F. Meyer, Böklen Mitt. 1 (1884), S. 11; Zeitschr. Math. Phys. 30 (1885), S. 346.

gelegt wird, lautet (mit $t = 1$):

$$(3a\lambda + a')\left(x + \frac{a'a''}{9a}\right) + b\left(y + \frac{3ac^2 + a''b^2}{9ab}\right) = 0$$

oder mit Benutzung von (39):

$$3(3a\lambda + a')x + 3by + a'a''\lambda + a''^2 + c^2 = 0\,. \tag{48}$$

Die beiden Gleichungen (47) *und* (48) *stellen also die senkrechte Projektion der Direktrix* (46) *auf die Schmiegungsebene* λ *dar.*

15. Elemente der Achsenparabel. Der Achsenkegelschnitt der kub. Parabel in der Schmiegungsebene (47) ist nach § 10, 4 eine *Parabel*. Er hat die Gleichung § 10, (5) mit den Koeffizienten ($l = 0$, $m = 0$, $n = 1$; $b' = 0$):

$$\left\{\begin{array}{l} b_{11} = (a'^2 - 3aa'')\lambda^2 + a'a''\lambda + a''^2, \quad b_{22} = b^2\lambda^2, \quad b_{33} = c^2, \\ 2b_{23} = bc\lambda, \quad 2b_{31} = (-3a\lambda^2 + a'\lambda + 2a'')c, \quad 2b_{12} = 2a'b\lambda^2 + a''b\lambda, \\ 2b_{14} = -3(3a\lambda + a'), \quad 2b_{24} = -3b, \quad 2b_{34} = 0, \quad b_{44} = 0\,. \end{array}\right. \tag{49}$$

Ist nun x' die Hauptachse und z' die Scheiteltangente der Parabel (Fig. 48), so sind die Richtungskosinus von x' nach II § 103, (4):

$$\alpha_1 = \frac{b_{14}}{\varrho}, \quad \beta_1 = \frac{b_{24}}{\varrho}, \quad \gamma_1 = \frac{b_{34}}{\varrho} = 0; \quad \varrho = \sqrt{b_{14}^2 + b_{24}^2}\,. \tag{50}$$

Ferner ist für die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des *Scheitelpunktes* nach II § 103, (10):

$$\left\{\begin{array}{l} 2\varrho^4 x_0 = 2\varrho^2(b_{11}b_{14} + b_{12}b_{24}) - (b_{11}b_{14}^2 + 2b_{12}b_{14}b_{24} + b_{22}b_{24}^2)b_{14}\,, \\ 2\varrho^4 y_0 = 2\varrho^2(b_{12}b_{14} + b_{22}b_{24}) - (b_{11}b_{14}^2 + 2b_{12}b_{14}b_{24} + b_{22}b_{24}^2)b_{24}\,, \\ 2\varrho^2 z_0 = 2(b_{13}b_{14} + b_{23}b_{24})\,. \end{array}\right. \tag{51}$$

Der Brennpunkt der Parabel hat auf der Achse x' den Abstand $-\frac{p}{2}$ vom Scheitel und daher die Koordinaten:

$$x = x_0 - \frac{p}{2}\alpha_1, \quad y = y_0 - \frac{p}{2}\beta_1, \quad z = z_0 - \frac{p}{2}\gamma_1 = z_0\,, \tag{52}$$

wo der *Parameter* p nach II § 104, (2); II § 103, (16); (5); II § 102, (19) den Wert hat:

$$p = \frac{(b_{22} + b_{33})b_{14}^2 + (b_{11} + b_{33})b_{24}^2 - 2b_{12}b_{14}b_{24}}{\varrho^3}\,. \tag{53}$$

Die homogenen Koordinaten des Brennpunktes der Achsenparabel λ *werden daher:*

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2b_{12}b_{24} + (b_{11} - b_{22} - b_{33})b_{14}\,, \quad y = 2b_{12}b_{14} + (b_{22} - b_{11} - b_{33})b_{24}\,, \\ \qquad z = 2(b_{13}b_{14} + b_{23}b_{24})\,, \quad t = 2(b_{14}^2 + b_{24}^2)\,. \end{array}\right. \tag{54}$$

Die Direktrix der Parabel wird aus der Ebene (47) ausgeschnitten durch eine zweite Ebene, die zu x' senkrecht ist und den Abstand $\frac{p}{2}$ vom Scheitelpunkt (Fig. 48), also die Gleichung hat:

$$(55)\qquad \alpha_1\left(x - x_0 - \frac{p}{2}\alpha_1\right) + \beta_1\left(y - y_0 - \frac{p}{2}\beta_1\right) + \gamma_1\left(z - z_0 - \frac{p}{2}\right)\gamma_1 = 0$$

oder nach II § 103, (8); (7); (9):

$$(56)\qquad 2b_{14}x + 2b_{24}y - (b_{11} + b_{22} + b_{33}) = 0\,.$$

Die Direktrix der Achsenparabel λ ist dargestellt durch die Gleichungen (47) *und:*

$$(57)\qquad 3(3a\lambda + a')x + 3by + (a'^2 - 3aa'' + b^2)\lambda^2 + a'a''\lambda + a''^2 + c^2 = 0\,.$$

16. Ort der Brennpunkte der Achsenparabeln. Mit Rücksicht auf (49) stellen die Gleichungen (54) bei veränderlichem λ eine Raumkurve 3. O. § 4, (1) dar, welche die unendlich ferne Ebene $t = 0$ in einem reellen, $\lambda = \infty$, und zwei imaginären Punkten schneidet:

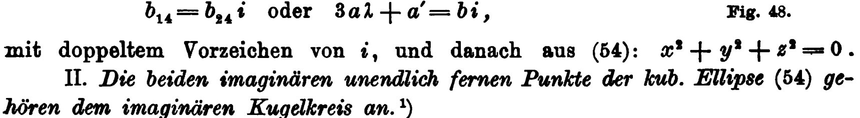


I. *Der Ort der Brennpunkte aller Achsenparabeln der kub. Parabel ist eine kub. Ellipse.* [1])

Für den Parameter λ der beiden imaginären unendlich fernen Punkte ist nun:

$$b_{14} = b_{24}\,i \quad \text{oder} \quad 3a\lambda + a' = bi\,,$$

Fig. 48.



mit doppeltem Vorzeichen von i, und danach aus (54): $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

II. *Die beiden imaginären unendlich fernen Punkte der kub. Ellipse* (54) *gehören dem imaginären Kugelkreis an.* [1])

17. Eigenschaft der kub. Parabel mit Direktrix. Da im Falle (39) die Gleichung (57) mit (48) übereinkommt, so folgt:

Die Direktrix der Achsenparabel λ der kub. Parabel (21), (39) *ist die senkrechte Projektion der Direktrix* (46) *auf die Schmiegungsebene λ.* [2])

---

1) W. Wirtinger, Wien. Sitzungsber. 94 (1886) 2. Abt., S. 302.

2) O. Böklen, Zeitschr. Math. Phys. 29 (1884), S. 379.

II. Abschnitt.

Behandlung der Raumkurve dritter Ordnung in Tetraederkoordinaten.

I. Kapitel.

Bestandteile der Raumkurve dritter Ordnung.

§ 24. Punkte und Schmiegungsebenen.

1. Definition von Punktreihe und Ebenenbüschel. Werden unter x_k und u_k, $k = 1, 2, 3, 4$, *Punkt-* und *Ebenenkoordinaten* in bezug auf ein beliebiges *Koordinatentetraeder* $E_1 E_2 E_3 E_4$ verstanden, so enthalten die Gleichungensysteme:

(1) $$\varrho x_k = a_{k1}\lambda^3 + a_{k2}\lambda^2 + a_{k3}\lambda + a_{k4};$$

(1′) $$\sigma u_k = A_{k1} - 3A_{k2}\lambda + 3A_{k3}\lambda^2 - A_{k4}\lambda^3,$$

unter ϱ und σ Proportionalitätsfaktoren verstanden, wie § 4, (1), die Parameterdarstellung der *allgemeinen Punktreihe* (Raumkurve) *3. O.* und des *allgemeinen Ebenenbüschels 3. O.*

Unter der Voraussetzung:

(2) $$A = |a_{kl}| \neq 0; \qquad (2')\quad \mathsf{A} = |A_{kl}| \neq 0$$

entspricht jedem Werte des *Parameters* λ immer ein und nur ein „*Punkt* λ“ der Reihe, bezüglich eine „*Ebene* λ“ des Büschels.

Die 16 *Konstanten* a_{kl} und die 16 *Konstanten* A_{kl} können beiderseits ganz unabhängig voneinander gedacht werden. Setzen wir indessen voraus, daß die A_{kl} die *Unterdeterminanten* 3. Grades der *Determinante* A sind, so werden die beiden Gebilde (1) und (1′) von einander abhängig gemacht (siehe später unter **10**), aber auch dann kann (I Anm. 1, III, (8)) jedes der beiden Gebilde, gleichviel welches, als das ursprünglich gegebene und daher als völlig allgemein gelten.

2. Charakteristische Eigenschaft von Punktreihe und Ebenenbüschel. Die Substitution der Koordinaten (1) oder (1′) in die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Ebene:

(3) $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

gibt je eine Gleichung 3. Grades in λ, deren Koeffizienten nach (2) oder (2′) niemals alle verschwinden (§ 4, 3).

Daher liegen in jeder Ebene des Raumes drei Punkte der Punktreihe 3. O. und gehen durch jeden Punkt des Raumes drei Ebenen des Büschels 3. O.[1])

Von den drei Elementen sind entweder *eines* oder alle *drei reell.*

3. Die Determinante der Parameterdarstellung als Invariante der Koordinatentransformation. Irgend ein *neues Koordinatentetraeder* $J_1 J_2 J_3 J_4$ wird mit willkürlichen Konstanten c_{kl} von nicht verschwindender *Substitutionsdeterminante:*

(4) $$C = | c_{kl} |$$

durch die Gleichungen eingeführt (I § 63, (8); (9)):

(5) $$x_k = \sum_1^4{}^l c_{kl} y_l; \qquad (6) \quad C y_l = \sum_1^4{}^k C_{kl} x_k,$$

$k, l = 1, 2, 3, 4$, wo C_{kl} die Unterdeterminanten 3. Grades von C sind. Schreibt man daher die Gleichungen (1) in der Form:

(7) $$\varrho x_k = \sum_1^4{}^m a_{km} \lambda^{4-m},$$

so wird nach (6):

$$\varrho C y_l = \sum{}^k C_{kl} \sum{}^m a_{km} \lambda^{4-m} = \sum{}^m \left\{ \sum{}^k C_{kl} a_{km} \right\} \lambda^{4-m}$$

oder wenn man:

(8) $$C b_{lm} = \sum_1^4{}^k C_{kl} a_{km}$$

setzt:

(9) $$\varrho y_l = \sum_1^4{}^m b_{lm} \lambda^{4-m}.$$

In dem neuen System erhalten also die Gleichungen (7) *die Form* (9) *mit den durch* (8) *definierten Koeffizienten.*

Nun ist (I Anm. 1, V, 3) nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten:

$$C^4 B = C^4 \cdot | b_{lm} | = | C b_{lm} | = | C_{kl} | \cdot | a_{km} | = C^3 A.$$

Zwischen den Determinanten der Parameterdarstellungen (7) und (9) besteht die Beziehung:

(10) $$A = BC.$$

---

1) M. Chasles, J. de Math. (2) 2 (1857), S. 404 (Nr. 40); H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 29; Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 166.

Die Determinante der Parameterdarstellung ist gegen jede Koordinatentransformation invariant.

4. Die Determinante als Invariante der Parametertransformation. Führt man in (7) bei *ungeändertem Koordinatentetraeder* durch die Substitution:

$$\lambda = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta} \tag{11}$$

mit nicht verschwindender Substitutionsdeterminante:

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \tag{12}$$

einen *neuen Parameter* μ ein, so wird, wenn der gemeinsame Nenner $(\gamma\mu + \delta)^3$ der rechten Seite in ϱ aufgenommen wird:

$$\varrho x_k = \sum_1^4{}^m a'_{km}\,\mu^{4-m}, \tag{13}$$

wo:

$$\left\{\begin{aligned} &a'_{k1} = b_{k1}\alpha^2 + b_{k3}\gamma^2, \quad a'_{k2} = 2b_{k1}\alpha\beta + b_{k2}\alpha^2 + 2b_{k3}\gamma\delta + b_{k4}\gamma^2,\\ &a'_{k3} = b_{k1}\beta^2 + 2b_{k2}\alpha\beta + b_{k3}\delta^2 + 2b_{k4}\gamma\delta, \quad a'_{k4} = b_{k2}\beta^2 + b_{k4}\delta^2\end{aligned}\right. \tag{14}$$

und wiederum:

$$\begin{aligned} b_{k1} &= a_{k1}\alpha + a_{k2}\gamma, \; b_{k2} = a_{k1}\beta + a_{k2}\delta,\\ b_{k3} &= a_{k3}\alpha + a_{k4}\gamma, \; b_{k4} = a_{k3}\beta + a_{k4}\delta. \end{aligned} \tag{15}$$

Dann wird nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten:

$$A' = |a'_{kl}| = \Delta^4 |b_{kl}| = \Delta^6 |a_{kl}| = \Delta^6 A. \tag{16}$$

I. *Die Determinante der Parameterdarstellung ist gegen jede lineare Transformation des Parameters invariant.*

Die drei verfügbaren Konstantenverhältnisse $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ der Substitution (11) kann man so bestimmen, daß drei beliebig angenommene Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Kurve (1) in der neuen Darstellung (13) vorgegebene Parameter μ_1, μ_2, μ_3 bekommen. Mit Rückkehr zur ursprünglichen Bezeichnung erhält man daher den Satz:

II. *In der Darstellung* (1) *kann der Parameter λ von vornherein so gewählt werden, daß drei beliebig angenommene Punkte der Kurve vorgegebene Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, z. B.* 0, 1, ∞ *oder* ∞, 1, -1, *erhalten.*

5. Die kanonischen Koordinaten. Nimmt man für die Konstanten c_{kl} des neuen Koordinatensystems insbesondere:

$$c_{kl} = a_{kl}, \tag{17}$$

so geht die Substitution (5), (6) über in:

$$x_k = \sum_1^4{}^l a_{kl} y_l; \quad (19)\; A y_l = \sum_1^4{}^k A_{kl} x_k, \tag{18}$$

während gleichzeitig zwischen alten und neuen Ebenenkoordinaten die Gleichungen bestehen (I § 63, (11); (12)):

(20) $$v_l = \sum_1^4{}^k a_{kl} u_k; \quad (21)\ A u_k = \sum_1^4{}^l A_{kl} v_l.$$

Setzt man jetzt in (19) die Werte (1) und in (20) die Werte (1′) ein, so folgt:

$$A \varrho y_l = \sum_1^4{}^k A_{kl}(a_{k1}\lambda^3 + a_{k2}\lambda^2 + a_{k3}\lambda + a_{k4});$$

$$\sigma v_l = \sum_1^4{}^k a_{kl}(A_{k1} - 3A_{k2}\lambda + 3A_{k3}\lambda^2 - A_{k4}\lambda^3)$$

oder (I Anm. 1, III, (17)) mit $A\sigma$ für σ:

I. *Die Parameterdarstellungen* (1) *und* (1′) *der allgemeinen Punktreihe und des allgemeinen Strahlbüschels 3. O. können durch Einführung eines neuen Koordinatensystems $J_1 J_2 J_3 J_4$ stets auf die Form gebracht werden:*

(22) $$\varrho y_1 = \lambda^3,\ \varrho y_2 = \lambda^2,\ \varrho y_3 = \lambda,\ \varrho y_4 = 1^{1)};$$

(22′) $$\sigma v_1 = 1,\ \sigma v_2 = -3\lambda,\ \sigma v_3 = 3\lambda^2,\ \sigma v_4 = -\lambda^3.$$

Wir nennen die neuen *Punkt-* und *Ebenenkoordinaten* y_k und v_k, welche durch die zusammengehörigen Formeln (18)—(21) mit den alten x_k und u_k verbunden sind, die *kanonischen Koordinaten* der Gebilde (1) und (1′). Zu den Formeln (18)—(21) treten noch die zwischen alten und neuen *Strahlenkoordinaten* p_k und r_k hinzu (I § 63, (19); (20)):

(23) $$p_k = \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} r_l \quad (24)\ A^2 r_l = \sum_1^6{}^k \mathrm{A}_{kl} p_k.$$

hinzu, wo α_{kl} und A_{kl} die aus den Elementen a_{kl}, bezüglich A_{kl} gebildeten Unterdeterminanten 2. Grades sind (I Anm. 1, III, (4)).

6. Schnittpunkte der Raumkurve mit einer Ebene. Die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Ebene:

(25) $$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = 0$$

gibt mit Substitution der Werte (22) oder (22′):

(26) $$v_1\lambda^3 + v_2\lambda^2 + v_3\lambda + v_4 = 0; \quad (26')\ y_1 - 3\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3 - \lambda^3 y_4 = 0;$$

also entsprechend dem Satze unter 2:

1) Möbius, Werke 1, S. 118 (1827); Joachimsthal, J. f. Math. 56 (1858), S. 44; Cremona, Ann. di mat. (1) 1 (1858), S. 164. R. Mehmke, Punkt- und Vektorrechnung 1 (1913), S. 198.

Die drei in einer gegebenen Ebene v_k liegenden Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Punktreihe (22) *bestimmen sich aus der kubischen Gleichung* (26), *sodaß:*

$$(27)\quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\dfrac{v_2}{v_1}, \\ \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{v_3}{v_1}, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\dfrac{v_4}{v_1}. \end{cases}$$

Die drei durch einen gegebenen Punkt y_k gehenden Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des Ebenenbüschels (22′) *bestimmen sich aus der kubischen Gleichung* (26′), *sodaß:*

$$(27')\quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3\dfrac{y_3}{y_4}, \\ \lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{3y_2}{y_4}, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \dfrac{y_1}{y_4}. \end{cases}$$

7. Verbindungsebene dreier Punkte der Raumkurve. Umgekehrt gelten wie § 7, 2; 7 die Sätze:

Die Verbindungsebene dreier gegebenen Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Punktreihe hat die Gleichung:[1])

$$(28)\quad y_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)y_2 + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)y_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 y_4 = 0.$$

Der Schnittpunkt dreier gegebenen Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des Ebenenbüschels hat die Gleichung:

$$(28')\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 v_1 + \tfrac{1}{3}(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)v_2 + \tfrac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)v_3 + v_4 = 0.$$

8. Berührungsebene der Raumkurve.

Fallen von den drei Punkten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Punktreihe, die eine Ebene enthält, zwei zusammen, $\lambda_1 = \lambda_2$, so ist die Ebene eine *Berührungsebene im Punkte $\lambda_1 = \lambda_2$ der Punktreihe.*

Fallen von den drei Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des Ebenenbüschels, die durch einen Punkt gehen, zwei zusammen, $\lambda_1 = \lambda_2$, so ist der Punkt ein *Berührungspunkt in der Ebene $\lambda_1 = \lambda_2$ des Ebenenbüschels.*

Mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \lambda_0$ folgt daher aus (28) und (28′):

Diejenige Berührungsebene im Punkte λ der Punktreihe, die noch durch den Punkt λ_0 geht, hat die Gleichung:[2])

$$(29)\quad y_1 - (2\lambda + \lambda_0)y_2 + \lambda(\lambda + 2\lambda_0)y_3 - \lambda^2\lambda_0 y_4 = 0.$$

Derjenige Berührungspunkt in der Ebene λ des Ebenenbüschels, der noch in der Ebene λ_0 liegt, hat die Gleichung:

$$(29')\quad \lambda^2\lambda_0 v_1 + \tfrac{1}{3}\lambda(\lambda + 2\lambda_0)v_2 + \tfrac{1}{3}(2\lambda + \lambda_0)v_3 + v_4 = 0.$$

Da die Gleichung (29) in λ_0 linear ist, stellt sie bei festem λ und veränderlichem λ_0 ein Ebenenbüschel (1. O.) dar, also:

---

1) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 166; Joachimsthal, J. f. Math. 56 (1859), S. 45.

2) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 278.

Alle Berührungsebenen im Punkte λ der Punktreihe gehen durch eine Gerade.

Alle Berührungspunkte in der Ebene λ des Ebenenbüschels liegen auf einer Geraden.

Auf diese Geraden kommen wir in § 25, 5 zurück.

9. Die Schmiegungsebenen der Raumkurve. Wird im besonderen $\lambda_0 = \lambda$, so wird aus der Tangentenebene die *Schmiegungsebene im Punkte λ* und aus dem Berührungspunkt der *Schmiegungspunkt in der Ebene λ.*

Die Schmiegungsebene im Punkte λ der Punktreihe (22) *hat die Gleichung:*[1])

(30) $y_1 - 3\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3 - \lambda^3 y_4 = 0$

und demnach die Koordinaten:

(31) $\sigma v_1 = 1,\ \sigma v_2 = -3\lambda,$
$\sigma v_3 = 3\lambda^2,\ \sigma v_4 = -\lambda^3.$

Der Schmiegungspunkt in der Ebene λ des Ebenenbüschels (22') *hat die Gleichung:*

(31') $\lambda^3 v_1 + \lambda^2 v_2 + \lambda v_3 + v_4 = 0$

und demnach die Koordinaten:

(31') $\varrho y_1 = \lambda^3,\ \varrho y_2 = \lambda^2,\ \varrho y_3 = \lambda,$
$\varrho y_4 = 1.$

10. Identität von Punktreihe und Ebenenbüschel 3. O. Hieraus folgt zunächst mit Rücksicht darauf, daß die Gleichungen (1) und (1') je *unabhängig voneinander* mit willkürlichen Konstanten a_{kl} oder A_{kl} gegeben und durch Koordinatentransformation auf die Form (22) oder (22') gebracht werden konnten, mit der nun (31') und (31) übereinstimmt:

I. *Die Schmiegungsebenen einer jeden gegebenen Punktreihe 3. O. bilden einen Ebenenbüschel 3. O.*[2])

I'. *Die Schmiegungspunkte eines jeden gegebenen Ebenenbüschels 3. O. bilden eine Punktreihe 3. O.*[2])

Weiter aber folgt mit Rückgang auf **1**, wo die Koeffizienten A_{kl} in (1') die Unterdeterminanten der Determinante der Koeffizienten a_{kl} in (1) und daher die Gleichungen (1) und (1') wechselseitig *von einander abhängig* sein sollten:

II. *Die Schmiegungsebenen der Punktreihe* (1) *bilden gerade den Ebenenbüschel* (1') *und die Schmiegungsebenen des Ebenenbüschels* (1') *gerade die Punktreihe* (1).

Wir fassen nunmehr beide, Punktreihe und Ebenenbüschel, als ein einziges aus *„Punkten“ und „Ebenen“* bestehendes Gebilde auf, das wir *Raumkurve 3. O. und 3. Klasse* nennen. Die Ordnung bezeichnet die Anzahl der Punkte der Raumkurve in jeder Ebene des Raumes,

1) Joachimsthal, J. f. Math. 56 (1859), S. 45.
2) H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 36.

die Klasse aber die Anzahl der Ebenen der Raumkurve durch jeden Punkt des Raumes.

III. *Alsdann ist dieselbe Raumkurve 3. O. und 3. Kl. in einem beliebigen Koordinatensystem in Punkt- und Ebenenkoordinaten*[1]) *durch die Gleichungen* (1) *und* (1′) *dargestellt, im kanonischen System ebenso durch* (22) *und* (22′).

IV. *Ein Punkt der Kurve und die zu ihm gehörige Schmiegungsebene entsprechen dabei demselben Parameterwert* λ.

11. Darstellung ohne Parameter. Durch Elimination von λ aus je zwei Gleichungen (22) und (22′) folgt:

$$(32)\quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}; \qquad (32')\quad \frac{3v_4}{v_3} = \frac{v_3}{v_2} = \frac{v_2}{3v_1}.$$

I. *Die Punkte der Raumkurve sind daher gemeinsame Punkte der drei Flächen 2. Ordnung:*

$$(33)\quad f = y_2y_4 - y_3^2 = 0,\ g = y_2y_3 - y_1y_4 = 0,\ h = y_1y_3 - y_2^2 = 0,$$

und die Ebenen der Raumkurve gemeinsame Tangentialebenen der drei Flächen zweiter Klasse:

$$(33')\quad F = 3v_1v_3 - v_2^2 = 0,\ G = 9v_1v_4 - v_2v_3 = 0,\ H = 3v_2v_4 - v_3^2 = 0.$$

Schon *zwei* Flächen können im allgemeinen dienen, um eine Raumkurve als ihren Durchschnitt zu bestimmen, so die beiden Kegelflächen (33):

$$(34)\quad \begin{cases} f = y_4y_2 - y_3y_3 = 0, \\ h = -y_2y_2 + y_1y_3 = 0. \end{cases}$$

Diese haben jedoch außer der Raumkurve 3. O. noch eine ganze Gerade:

$$(35)\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 0$$

gemein, welche der Fläche $g = 0$ nicht angehört, sondern sie nur in zwei Punkten $y_1, y_2, y_3, y_4 = 1, 0, 0, 0;\ 0, 0, 0, 1$ schneidet. Alle andern gemeinsamen Punkte von $f = 0$ und $h = 0$ gehören der Fläche $g = 0$ an, da aus den in y_2, y_3 linearen homogenen Gleichungen, falls y_2 und y_3 nicht beide 0 sind, die Gleichung $g = 0$ folgt.

Durch Hinzunahme der *dritten* Fläche $g = 0$ wird daher die gerade Linie (35) als fremder Bestandteil des Durchschnittes der beiden andern Flächen ausgeschieden. In diesem Sinne sagen wir:

II. *Die Raumkurve 3. O. und 3. Kl. wird in Punkt- und Ebenenkoordinaten durch die drei Gleichungen* (33), *bezüglich* (33′) *dargestellt.*

1) J. Tannery, Bull. sc. math. 11 (1876), S. 185.

§ 25. Tangenten.

1. Raumkurve 3. O. und gerade Linie. Eine gerade Linie im Raume kann nach § 4, **3**, II *nicht mehr als zwei Punkte* P_1 und P_2 der Raumkurve enthalten. Ebenso können durch eine gerade Linie *nicht mehr als zwei Ebenen* der Raumkurve gehen.

2. Begriff der Sehne und Achse. Eine gerade Linie, die zwei Punkte der Raumkurve 3. O. enthält, heißt nach § 8, **1** eine *Sehne*; eine gerade Linie durch die zwei Ebenen der Raumkurve 3. O. gehen, nach § 8, **2** eine *Achse der Kurve.*

3. Gleichungen einer Sehne oder Achse. *Die Gleichungen der Sehne,* welche zwei Punkte λ_1 und λ_2 der Kurve § 24, (22) verbindet[1]), bezüglich *der Achse,* in welcher sich zwei Schmiegungsebenen der Kurve § 24, (22′) schneiden, lauten *in kanonischen Koordinaten,* wie § 8, (1); (3):

$$(1) \quad y_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) y_2 + \lambda_1 \lambda_2 y_3 = 0, \quad y_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) y_3 + \lambda_1 \lambda_2 y_4 = 0;$$

$$(1') \quad 3\lambda_1 \lambda_2 v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_2 + v_3 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 v_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_3 + 3 v_4 = 0.$$

4. Doppelte Entstehung der Tangente.

Fallen für eine Sehne die beiden Punkte λ_1 und λ_2, die sie verbindet, in einen Punkt λ zusammen, so wird sie *die Tangente im Punkte λ der Punktreihe 3. O.*

Die Gleichungen der Tangente im Punkte λ sind nach (1):

$$(2) \quad \begin{cases} y_1 - 2\lambda y_2 + \lambda^2 y_3 = 0, \\ y_2 - 2\lambda y_3 + \lambda^2 y_4 = 0; \end{cases}$$

Fallen für eine Achse die beiden Ebenen λ_1 und λ_2, die sich in ihr schneiden, in eine Ebene λ zusammen, so wird sie *die Tangente in der Ebene λ des Ebenenbüschels 3. O.*

Die Gleichungen der Tangente in der Ebene λ sind nach (1′):

$$(2') \quad \begin{cases} 3\lambda^2 v_1 + 2\lambda v_2 + v_3 = 0, \\ \lambda^2 v_2 + 2\lambda v_3 + 3 v_4 = 0. \end{cases}$$

Die beiden Geraden (2) und (2′) sind nach § 8, **6** dieselben und haben die Strahlenkoordinaten[2]):

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho r_1 = \lambda^2, & \varrho r_2 = -2\lambda^3, & \varrho r_3 = \lambda^4, \\ \varrho r_4 = 3\lambda^2, & \varrho r_5 = 2\lambda, & \varrho r_6 = 1. \end{cases}$$

Die „Tangente λ“ der Raumkurve, die in Punkt- und Ebenenkoordinaten durch die Gleichungen (2), *bezüglich* (2′) *dargestellt ist und deren Strahlenkoordinaten die Werte* (3) *haben, ist also sowohl die Ver-*

---

1) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 164.

2) R. Sturm, J. f. Math. 86 (1879), S. 120.

bindungslinie des Punktes λ mit seinem unendlich benachbarten als die Schnittlinie der Schmiegungsebene λ mit ihrer benachbarten.[1])

5. Beziehung der verschiedenen Berührungselemente. Die Punkte der Tangente (2) genügen der Gleichung § 24, (29) unabhängig von λ_0, die Ebenen der Tangente (2′) ebenso der Gleichung § 24, (29′). Daher folgt, daß die am Schluß von § 24, 8 erwähnten Geraden beide in die Tangente fallen.

Durch die „Tangente λ" gehen alle „Berührungsebenen im Punkte λ".

Auf der „Tangente λ" liegen alle „Berührungspunkte in der Ebene λ".

Oder etwas anders ausgedrückt:

In jeder durch die Tangente λ gehenden Ebene liegt außer dem doppelt zählenden Punkte λ nur noch ein Punkt λ_0 der Kurve.

Durch jeden auf der Tangente λ liegenden Punkt geht außer der doppelt zählenden Ebene λ nur noch eine Schmiegungsebene λ_0.

6. Dreifache Parameterdarstellung der Raumkurve. Neben die Parameterdarstellung der Punkte § 24, (22) und Schmiegungsebenen § 24, (22′) stellt sich diejenige der Tangenten in (3), sämtlich auf das *kanonische System* bezogen. Führt man die Darstellung (3) mittels § 24, (23) auf das *ursprüngliche Koordinatensystem* zurück, so folgt:

Die in Punkt- und Ebenenkoordinaten durch die Gleichungen § 24, (1) *und* (1′) *dargestellte Raumkurve hat in Linienkoordinaten die Gleichungen:*

$$(4)\qquad \varrho p_k = \alpha_{k1}\lambda^2 - 2\alpha_{k2}\lambda^3 + \alpha_{k3}\lambda^4 + 3\alpha_{k4}\lambda^2 + 2\alpha_{k5}\lambda + \alpha_{k6},$$

$k = 1, 2, \ldots, 6$ (vgl. die dreifache Darstellung der Fläche 2. O, II § 138, (1); § 143, (2); § 144, (2)).

7. Der Rang der Raumkurve 3. O. Soll, im kanonischen System betrachtet, die Tangente (3) eine gegebene Gerade r_k^0 schneiden, muß die Bedingung der vereinigten Lage (I § 59, 8):

$$(5)\qquad r_1^0 r_4 + r_2^0 r_5 + r_3^0 r_6 + r_4^0 r_1 + r_5^0 r_2 + r_6^0 r_3 = 0$$

oder mit Einsetzung der Werte (3):

$$(6)\qquad r_6^0\lambda^4 - 2r_5^0\lambda^3 + (3r_1^0 + r_4^0)\lambda^2 + 2r_2^0\lambda + r_3^0 = 0$$

erfüllt sein. Hier können nicht alle Koeffizienten verschwinden, da aus $r_2^0 = 0$, $r_3^0 = 0$, $r_5^0 = 0$, $r_6^0 = 0$ bereits (I § 59, 2) $r_1^0 r_4^0 = 0$ und da-

1) Über die Abhängigkeit von vier Tangenten vgl. A. Voß, Math. Ann. 13 (1878), S. 169; H. Schubert, ebd. 15 (1879), S. 531; R. Sturm, J. f. Math. 86 (1879), S. 130.

mit aus $3r_1^0 + r_4^0 = 0$ auch $r_1^0 = 0$, $r_4^0 = 0$ folgen würde. Die Bedingung liefert also vier Wurzeln λ und damit vier Tangenten.

Jede Gerade des Raumes wird von vier Tangenten der Raumkurve getroffen; die Raumkurve ist vom Range 4.[1])

Ist r_x^0 selbst eine Tangente mit $\lambda = \lambda_0$ aus (3), so wird die Gleichung (6):

$$(7) \qquad (\lambda - \lambda_0)^4 = 0,$$

gibt daher vierfach zählend die Tangente λ_0 selbst (vgl. § 26, 5).

8. **Linearer Komplex der Tangenten.** Durch Elimination von λ^2 aus der 1. und 4. Gleichung (3) ergibt sich:

Die Tangenten der Raumkurve 3. O. gehören dem linearen Komplexe an[2])*:*

$$(8) \qquad r_4 - 3r_1 = 0.$$ [3])

Im ursprünglichen Koordinatensystem lautet die Gleichung dieses Komplexes nach § 24, (24):

$$(9) \qquad \sum_1^6 {}^k (\mathsf{A}_{k4} - 3\mathsf{A}_{k1}) p_k = 0 \quad \text{oder:} \quad \sum_1^6 {}^k (\alpha_{\bar{k}1} - 3\alpha_{\bar{k}4}) p_k = 0$$ [4])

(I Anm. 1, III, (11)), wo $\bar{k}$ den komplementären Index zu k (z. B. $k = 1$, $\bar{k} = 4$) bedeutet.

9. **Quadratischer Komplex der Tangenten.** Weiter folgen aus (3) die Gleichungen:

$$(10) \qquad 4r_1r_4 + 3r_2r_5 = 0, \quad r_2r_5 + 4r_3r_6 = 0,$$

beide gleichbedeutend, da identisch:

$$(4r_1r_4 + 3r_2r_5) + (r_2r_5 + 4r_3r_6) = 0.$$

Die Tangenten der Raumkurve 3. O. gehören dem quadratischen Komplexe an:

$$(11) \qquad r_1r_4 : r_2r_5 : r_3r_6 = 3 : -4 : 1.$$

10. **Beziehung des Komplexes zum Koordinatentetraeder.** Die Gerade r_k schneidet (I § 59, (13')) die Koordinatenebenen $y_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, in den Punkten:

$$0,\ r_3,\ -r_2,\ r_4; \quad -r_3,\ 0,\ r_1,\ r_5; \quad r_2,\ -r_1,\ 0,\ r_6; \quad -r_4,\ -r_5,\ -r_6,\ 0.$$

---

1) A. Cayley, J. de math. (1) 10 (1845), S. 250.

2) v. Staudt, Beitr. (1860), S. 314.

3) R. Sturm, J. f. Math. 86 (1879), S. 123.

4) J. Tannery, Bull. sc. math. 11 (1876), S. 186.

Aus der Punktreihe des 1. und 4. Punktes (I § 58, (20')):

$$\lambda \cdot 0 + \mu r_4, \quad \lambda r_3 + \mu r_5, \quad -\lambda r_2 + \mu r_6, \quad \lambda r_4 + \mu \cdot 0$$

gehen die beiden mittleren für $\lambda = r_5$, $\mu = -r_3$; $\lambda = r_6$, $\mu = r_2$ hervor. Daher folgt (I § 58, (19')):

Das Doppelverhältnis der Schnittpunkte 1, 2, 3, 4 der Geraden r_k *mit den vier Seitenflächen des Koordinatentetraeders ist:*

$$(12) \qquad \delta = \frac{42}{12} : \frac{43}{13} = -\frac{r_5}{r_3} : \frac{r_6}{r_2} = -\frac{r_2 r_5}{r_3 r_6}.$$

Diejenigen Geraden, welche das Tetraeder unter konstantem Doppelverhältnis δ *schneiden, bilden daher den „tetraedralen" Komplex:*

$$(13) \qquad r_1 r_4 : r_2 r_5 : r_3 r_6 = \delta - 1 : -\delta : 1.$$

Der Komplex (11) *ist daher ein tetraedraler und entspricht dem Werte* $\delta = 4$.[1])

11. Die Tangentenfläche. Aus (2) und (2') folgt mit den § 24, (33), (33') eingeführten Abkürzungen:

$$1 : -2\lambda : \lambda^2 = f : g : h; \quad 1 : -2\lambda : \lambda^2 = F : G : H,$$

und durch Elimination von λ ergibt sich:

Die Tangentenfläche der Raumkurve 3. O. hat in Punkt- und Ebenenkoordinaten die Gleichungen 4. Grades[2])*:*

$$(14) \qquad g^2 - 4fh = 0; \quad (14') \quad G^2 - 4FH = 0.$$

Der ersteren genügen alle Punkte y_k, *die auf einer Tangente liegen, der letzteren alle Ebenen* v_k, *die durch eine Tangente gehen.*

Daraus folgt mit Rücksicht auf § 24, 8:

Auf einer beliebigen Geraden liegen vier Berührungspunkte.	*Durch eine beliebige Gerade gehen vier Berührungsebenen.*[3])

12. Schnittkurve von Tangentenfläche und Schmiegungsebene. Vermöge der Gleichung:

$$(15) \qquad y_1 - 3\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3 - \lambda^3 y_4 = 0$$

besteht unter Elimination von y_4 die Identität:

$$(16) \quad \lambda^6(g^2 - 4fg) = (y_1 - 2\lambda y_2 + \lambda^2 y_3)^2 (y_1^2 - 3\lambda^2 y_2^2 + 4\lambda^2 y_3 y_1 - 2\lambda y_1 y_2),$$

---

1) Lindemann, Vorles. Geom. Raum (1891), S. 242; 288.

2) M. Chasles, Aperçu hist. (1837), S. 406 (Note 33, (14)); Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 164; H. A. Schwarz, J. f. Math. 64 (1865), S. 3; R. Sturm, Liniengeom. 1 (1892), S. 55.

3) Chasles, J. de math. (2) 2 (1857), S. 404 (Nr. 38); H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 33.

ebenso vermöge der Gleichung:

(15′) $$\lambda^3 v_1 + \lambda^2 v_2 + \lambda v_3 + v_4 = 0$$

unter Elimination von y_1 die Identität:

(16′) $$\lambda^6(G^2 - 4FH) = 3(\lambda^2 v_2 + 2\lambda v_3 + 3v_4)^2(3v_4^2 - \lambda^2 v_3^2 + 4\lambda^2 v_2 v_4 + 2\lambda v_3 v_4).$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf (2), (2′):

Die Schnittkurve der Tangentenfläche (14) *mit der Schmiegungsebene* (15) *zerfällt in die doppelt zählende Tangente λ und den Kegelschnitt*[1]*, der durch die Gleichung:*[2]

(17) $$y_1^2 - 3\lambda^2 y_2^2 + 4\lambda^2 y_3 y_1 - 2\lambda y_1 y_2 = 0$$

in Verbindung mit der Gleichung (15) *dargestellt wird.*

Die durch den Kurvenpunkt (15′) *gehenden Ebenen der Tangentenfläche* (14′) *umhüllen die doppelt zählende Tangente λ und den Kegel 2. Klasse, der durch die Gleichung:*

(17′) $$3v_4^2 - \lambda^2 v_3^2 + 4\lambda^2 v_2 v_4 + 2\lambda v_3 v_4 = 0$$

in Verbindung mit der Gleichung (15′) *dargestellt wird.*

§ 26. Sehnen und Achsen.

1. Bestimmung der Sehne durch einen Punkt des Raumes. Soll die Sehne § 25, (1) durch einen Punkt y_k^0 des Raumes gehen oder die Achse § 25, (1′) in einer Ebene v_k^0 liegen, müssen die Bedingungen erfüllt sein:

(1) $$\begin{cases} y_1^0 - (\lambda_1 + \lambda_2) y_2^0 + \lambda_1 \lambda_2 y_3^0 = 0, \\ y_2^0 - (\lambda_1 + \lambda_2) y_3^0 + \lambda_1 \lambda_2 y_4^0 = 0; \end{cases}$$

(1′) $$\begin{cases} 3\lambda_1 \lambda_2 v_1^0 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_2^0 + v_3^0 = 0, \\ \lambda_1 \lambda_2 v_2^0 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_3^0 + 3v_4^0 = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgen aber, mit Benutzung der Abkürzungen § 24, (33); (33′), für $\lambda_1 + \lambda_2$ und $\lambda_1 \lambda_2$ die Bedingungen:

(2) $$1 : -(\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1 \lambda_2 = f_0 : g_0 : h_0;$$

(2′) $$1 : -(\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1 \lambda_2 = F_0 : G_0 : H_0,$$

wo der Index 0 die Substitution $y_k = y_k^0$ und $v_k = v_k^0$ andeutet. Dann aber sind λ_1, λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichungen:

(3) $$f_0 \lambda^2 + g_0 \lambda + h_0 = 0;$$ (3′) $$F_0 \lambda^2 + G_0 \lambda + H_0 = 0.$$

---

1) H. Schröter, J. f. Math. 56 (1959), S. 28.

2) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 288.

I. *Durch einen gegebenen Punkt* y_k^0 *des Raumes geht eine Sehne der Raumkurve.*[1])

II. *Die beiden Punkte* λ_1, λ_2 *der Kurve, deren Verbindungslinie sie ist, bestimmen sich aus der quadratischen Gleichung* (3).

Sind sie reell, heißt die *Sehne* eine *eigentliche,* sonst eine uneigentliche.

I'. *In einer gegebenen Ebene* v_k^0 *des Raumes liegt eine Achse der Raumkurve.*[1])

II'. *Die beiden Schmiegungsebenen* λ_1, λ_2 *der Kurve, deren Schnittlinie sie ist, bestimmen sich aus der quadratischen Gleichung* (3').

Sind sie reell, heißt die *Achse* eine *eigentliche,* sonst eine uneigentliche.

Nach dem Satze I hat die Raumkurve 3. O. für jeden Augenpunkt im allgemeinen einen *scheinbaren Doppelpunkt.*[2])

2. Besondere Fälle. Die Gleichung (2) oder (2') hat eine Doppelwurzel, wenn der Punkt y_k^0 oder die Ebene v_k^0 der Tangentenfläche § 25, (14) oder (14') angehört.

Die Gleichung (2) oder (2') wird identisch in λ erfüllt, wenn der Punkt y_k^0 oder die Ebene v_k^0 der Kurve § 24, (33) oder (33') selbst angehört (s. nachher unter **11**).

3. Gleichungen der Sehne durch einen Punkt. Durch Einsetzen der Werte (2) in die Gleichungen § 25, (1) und der Werte (2') in die Gleichungen § 25, (1') geht hervor:

Die Gleichungen der durch einen gegebenen Punkt y_k^0 *gehenden Sehne in Punktkoordinaten, bezüglich der in einer gegebenen Ebene* v_k^0 *liegenden Achse in Ebenenkoordinaten, lauten:*

$$(4)\quad \begin{cases} f_0 y_1 + g_0 y_2 + h_0 y_3 = 0, \\ f_0 y_2 + g_0 y_3 + h_0 y_4 = 0; \end{cases} \qquad (4')\quad \begin{cases} 3F_0 v_4 - G_0 v_3 + H_0 v_2 = 0, \\ F_0 v_3 - G_0 v_2 + 3H_0 v_1 = 0. \end{cases}$$

4. Anzahl der Sehnen in einer Ebene. Da in jeder Ebene des Raumes drei Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Raumkurve liegen, so enthält die Ebene auch drei Sehnen $\lambda_2\lambda_3$, $\lambda_3\lambda_1$ und $\lambda_1\lambda_2$:

In jeder Ebene des Raumes liegen drei Sehnen.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen drei Achsen.

Die *Sehnenkongruenz* der Raumkurve 3. O. ist von der 1. O. und 3. Klasse, die *Achsenkongruenz* von der 1. Klasse und 3. O.[3])

---

1) A. Cayley, J. de math. (1) 10 (1845), S. 250; Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 25.

2) H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 43.

3) Reye, Geom. d. Lage 2 (1892), S. 191; G. Halphen, Bull. soc. math. 1 (1875), S. 114; R. Sturm, Hamburg. Mitteil. 2 (1889), S. 61.

5. Parameterdarstellung der Sehnenkongruenz. Mit den Abkürzungen:

(5) $$\lambda_1 + \lambda_2 = \mu, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \nu$$

ergibt sich aus den Gleichungen § 25, (1) und (1′) (I § 59, 1):

Die Achsenkoordinaten s_k der Sehne $\lambda_1 \lambda_2$ und die Strahlenkoordinaten r_k der Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ hängen von zwei unabhängigen Parametern μ und ν in der Weise ab:[1]

(6) $$\begin{cases} \varrho s_1 = \mu^2 - \nu, & \varrho s_4 = \nu \\ \varrho s_2 = \mu, & \varrho s_5 = -\mu\nu \\ \varrho s_3 = 1, & \varrho s_6 = \nu^2 \end{cases}$$ (6′) $$\begin{cases} \varrho r_1 = \frac{\mu^2 - \nu}{3}, & \varrho r_4 = 3\nu, \\ \varrho r_2 = -\mu\nu, & \varrho r_5 = \mu, \\ \varrho r_3 = \nu^2, & \varrho r_6 = 1. \end{cases}$$

Um die Formeln auch auf die Werte ∞ von λ_1 oder λ_2 anzuwenden, setzt man in (6), (6′) die Werte (5) ein, schreibt $\lambda_1 : \mu_1$, $\lambda_2 : \mu_2$ für λ_1, λ_2 und multipliziert die rechten Seiten mit $\mu_1^2 \mu_2^2$, sodaß:

(6″) $$\varrho s_1 = \lambda_1^2 \mu_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 + \lambda_2^2 \mu_1^2, \quad \varrho s_2 = (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)\mu_1 \mu_2,$$
$$\varrho s_3 = \mu_1^2 \mu_2^2, \quad \varrho s_4 = \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2, \quad \varrho s_5 = -(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)\lambda_1 \lambda_2, \quad \varrho s_6 = \lambda_1^2 \lambda_2^2.$$

Man hat dann z. B. für $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = 1$ die Werte 1, 0, 0, 0, 0, 0 der Achsenkoordinaten der Sehne $J_1 J_4$.

Die Gleichung § 25, (6) wird für eine Sehne $r_k^0 = \mu, \nu$ mit Rückgang auf die Werte (5):

$$\lambda^4 - 3\mu\lambda^3 + (2\nu + \mu^2)\lambda^2 - 2\mu\nu\lambda + \nu^2 = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)^2 = 0.$$

Eine Sehne wird also nur von den beiden Tangenten ihrer Endpunkte getroffen.

6. Quadratische Komplexe der Sehnen. Durch Elimination von μ, ν gehen aus (6) und (6′) die Gleichungen je *dreier quadratischer Komplexe hervor, denen die Sehnen, bezüglich die Achsen angehören:*

(7) $$s_2 s_4 + s_3 s_5 = 0, \quad s_2 s_6 + s_4 s_5 = 0, \quad s_3 s_6 - s_4^2 = 0;$$

(7′) $$r_2 r_4 + 3 r_3 r_5 = 0, \quad 3 r_2 r_6 + r_4 r_5 = 0, \quad 9 r_3 r_6 - r_4^2 = 0.$$

7. Zusammenfall oder Schnitt von Sehne und Achse. Soll eine Sehne μ, ν in (6) mit einer Achse μ', ν' in (6′) zusammenfallen, so muß bis auf einen Faktor τ:

$$\tau\nu = \frac{\mu'^2 - \nu'}{3}, \quad -\tau\mu\nu = -\mu'\nu', \quad \tau\nu^2 = \nu'^2, \quad \tau(\mu^2 - \nu) = 3\nu',$$
$$\tau\mu = \mu', \quad \tau \cdot 1 = 1.$$

1) R. Sturm, J. f. Math. 86 (1879), S. 120.

Da somit $\tau = 1$ ist, folgt: $\mu' = \mu$, $\nu' = \nu$ und dann: $3\nu = \mu^2 - \nu$ oder:

$$\mu^2 - 4\nu = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0. \tag{8}$$

I. *Die Tangenten sind die einzigen Geraden, die zugleich Sehnen und Achsen sind.*[1])

Die *Sehne* $\lambda_1\lambda_2$ und die *Achse* $\lambda_1 \times \lambda_2$ heißen *zusammengehörig*, weil diese die Schnittlinie der Schmiegungsebenen ist, die zu den Endpunkten jener gehören. Zusammengehörige Sehnen und Achsen haben auch gleiche Parameterwerte μ, ν in (6) und (6').

Sollen solchergestalt zusammengehörige Sehne und Achse sich schneiden, muß:

$$\tfrac{1}{3}(\mu^2 - \nu)^2 - \mu^2\nu + \nu^2 + 3\nu^2 - \mu^2\nu + \nu^2 = \tfrac{1}{3}(\mu^2 - 4\nu)^2 = 0,$$

also wie in (8) $\lambda_1 = \lambda_2$ sein.

II. *Sehne und zugehörige Achse schneiden sich, wenn sie nicht Tangenten sind, niemals.*

8. Gemeinsame Transversale von Sehne und Achse. Wenn eine Gerade r_k sowohl die Sehne $\lambda_1\lambda_2$ als die Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ schneidet, so muß nach (6) und (6'):

$$\begin{cases} R_1 = (\mu^2 - \nu)r_1 + \mu r_2 + r_3 + \nu r_4 - \mu\nu r_5 + \nu^2 r_6 = 0, \\ R_2 = 3\nu r_1 + \mu r_2 + r_3 + \dfrac{\mu^2 - \nu}{3} r_4 - \mu\nu r_5 + \nu^2 r_6 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

sein. Zwischen den linken Seiten dieser Bedingungen besteht aber die Identität:

$$R_1 - R_2 = (\mu^2 - 4\nu)(r_1 - \tfrac{1}{3} r_4). \tag{10}$$

Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist nach (8) $\mu^2 - 4\nu \neq 0$. Daher folgt aus (10):

I. *Eine gemeinsame Transversale einer Sehne $\lambda_1\lambda_2$ und der zugehörigen Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ gehört dem linearen Komplex* (§ 25, (8)) *an:*

$$3r_1 - r_4 = 0. \tag{11}$$

II. *Wenn eine dem Komplex* (11) *angehörige Gerade von Sehne $\lambda_1\lambda_2$ und zugehöriger Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ die eine schneidet, so schneidet sie auch die andere.*

9. Hyperboloidische Lage von zwei Sehnen und Achsen. Sind $\lambda_1\lambda_2$ und $\lambda_3\lambda_4$ zwei Sehnen, $\lambda_1 \times \lambda_2$ und $\lambda_3 \times \lambda_4$ die zugehörigen Achsen, so muß jede gemeinsame Transversale der drei Geraden $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_1 \times \lambda_2$, $\lambda_3\lambda_4$ nach 8, I dem Komplex (11) angehören und dann nach 8, II auch $\lambda_3 \times \lambda_4$ schneiden, also (I § 60, 7):

1) H. Schröter, Oberflächen 2. O., Leipzig 1880, S. 274.

Zwei Sehnen und die zugehörigen Achsen liegen stets hyperboloidisch.

10. Realitätsbeziehung von Sehne und Schmiegungsebene. Die Gleichungen zweier Punkte oder Schmiegungsebenen λ_1 und λ_2 der Kurve § 24, (22), (22′) lauten:

$$(12)\qquad \begin{cases} P_1 = \lambda_1^3 v_1 + \lambda_1^2 v_2 + \lambda_1 v_3 + v_4 = 0, \\ P_2 = \lambda_2^3 v_1 + \lambda_2^2 v_2 + \lambda_2 v_3 + v_4 = 0; \end{cases}$$

$$(12')\qquad \begin{cases} \Pi_1 = y_1 - 3\lambda_1 y_2 + 3\lambda_1^2 y_3 - \lambda_1^3 y_4 = 0, \\ \Pi_2 = y_1 - 3\lambda_2 y_2 + 3\lambda_2^2 y_3 - \lambda_2^3 y_4 = 0, \end{cases}$$

und danach die Gleichung irgendeines Punktes P der Sehne $\lambda_1 \lambda_2$ oder einer Ebene Π der Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ mit einem Parameter t:

$$(13)\qquad P = P_1 - tP_2 = 0; \qquad (13')\qquad \Pi = \Pi_1 - t\Pi_2 = 0.$$

Um die drei durch P gehenden Schmiegungsebenen (§ 24, 2) oder die drei in Π liegenden Kurvenpunkte zu bestimmen, setzt man in (13) die Werte § 24, (22′) oder in (13′) die Werte § 24, (22) ein. In beiden Fällen erhält man die in λ kubische Gleichung:

$$(14)\qquad (\lambda - \lambda_1)^3 - t(\lambda - \lambda_2)^3 = 0$$

und daraus:

$$(15)\qquad \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} = \sqrt[3]{t}; \qquad \lambda = \frac{\lambda_1 - \lambda_2\sqrt[3]{t}}{1 - \sqrt[3]{t}}.$$

Da die 3. Wurzel aus einem reellen t einen reellen und zwei komplexe Werte hat, folgt bei reell vorausgesetzten λ_1 und λ_2:

Geht durch einen Punkt des Raumes eine eigentliche Sehne, so geht durch ihn nur eine reelle Schmiegungsebene.[1]	*Liegt in einer Ebene des Raumes eine eigentliche Achse, so liegt in der Ebene nur ein reeller Kurvenpunkt.*

oder auch umgekehrt ausgedrückt:

Gehen durch einen Punkt drei reelle Schmiegungsebenen, so geht durch ihn keine eigentliche Sehne.	*Liegen in einer Ebene drei reelle Kurvenpunkte, so enthält sie keine eigentliche Achse.*

Wenn daher eine Sehne und eine Achse sich schneiden, so ist die eine eigentlich, die andere uneigentlich.[2]

---

1) Joachimsthal, J. f. Math. 56 (1859), S. 45; v. Staudt, Beitr. (1856), S. 381; Cremona, Ann. di mat. 2 (4859), S. 25.

2) H. Schröter, Oberflächen 2. O., Leipzig 1880, S. 292; St. Jolles, J. f. Math. 130 (1906), S. 274.

11. Sehnenkegel und Achsenkegelschnitt. Durch einen Punkt λ der Raumkurve 3. O. gehen nach 2 unendlich viele Sehnen, die ihn mit allen übrigen Punkten λ_0 der Kurve verbinden und daher einen *Kegel* bilden. In einer Schmiegungsebene λ liegen ebenso unendlich viele Achsen, in denen sie von allen übrigen Schmiegungsebenen λ geschnitten wird; sie umhüllen eine ebene *Kurve.*

Man erhält die Gleichung des Kegels und der Kurve, indem man aus den Gleichungen der Sehne $\lambda\lambda_0$ und der Achse $\lambda \times \lambda_0$ (§ 25, (1); (1')):

$$(16)\qquad \begin{cases} (y_1 - \lambda y_2) - \lambda_0(y_2 - \lambda y_3) = 0, \\ (y_2 - \lambda y_3) - \lambda_0(y_3 - \lambda y_4) = 0; \end{cases}$$

$$(16')\qquad \begin{cases} \lambda_0(3\lambda v_1 + v_2) + (\lambda v_2 + v_3) = 0, \\ \lambda_0(\lambda v_2 + v_3) + (\lambda v_3 + 3v_4) = 0; \end{cases}$$

λ_0 eliminiert:

$$(17)\qquad (y_1 - \lambda y_2)(y_3 - \lambda y_4) - (y_2 - \lambda y_3)^2 = 0;$$

$$(17')\qquad (3\lambda v_1 + v_2)(\lambda v_3 + 3v_4) - (\lambda v_2 + v_3)^2 = 0,$$

oder mit den in § 24, (33), (33') eingeführten Abkürzungen:

$$(18)\qquad \lambda^2 f + \lambda g + h = 0; \qquad\qquad (18')\qquad \lambda^2 F + \lambda G + H = 0.$$

Da beide Gleichungen vom 2. Grade sind, so folgt:

Die durch den Punkt λ der Raumkurve gehenden Sehnen bilden Kegel 2. O., den Sehnenkegel λ in (18).[1])	*Die in einer Schmiegungsebene λ liegenden Achsen umhüllen einen Kegelschnitt, den Achsenkegelschnitt λ in* (18').[2])

12. Duale Gleichungen von Sehnenkegel und Achsenkegelschnitt. Geordnet geben die Gleichungen (17) und (17'):

$$(19)\qquad 2y_2^2 + 2\lambda^2 y_3^2 - 2\lambda y_2 y_3 - 2y_3 y_1 + 2\lambda y_1 y_4 - 2\lambda^2 y_2 y_4 = 0;$$

$$(19')\qquad 2\lambda^2 v_2^2 + 2v_3^2 + 2\lambda v_2 v_3 - 6\lambda^2 v_3 v_1 - 18\lambda v_1 v_4 - 6v_2 v_4 = 0.$$

Der in *Ebenenkoordinaten* als *Fläche 2. Klasse* dargestellte *Kegelschnitt* (19') wird in *Punktkoordinaten* durch *zwei* Gleichungen dargestellt, die Gleichung seiner *Ebene,* der Schmiegungsebene λ, und die Gleichung eines *Kegels,* der etwa von der Spitze J_4 über ihm errichtet ist. Jene ist die Gleichung § 24, (30), diese aber lautet (II § 143, (12)):

$$\alpha_{11} y_1^2 + \alpha_{22} y_2^2 + \alpha_{33} y_3^2 + 2\alpha_{23} y_2 y_3 + 2\alpha_{31} y_3 y_1 + 2\alpha_{12} y_1 y_2 = 0,$$

---

1) Fr. Seydewitz, Arch. Math. Phys. 10 (1847), S. 207.
2) H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 29.

falls die α_{kl} die Determinanten 2. Grades aus den Koeffizienten:

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 2\lambda^2, \quad a_{33} = 2, \quad a_{44} = 0, \quad a_{23} = \lambda, \; a_{31} = -3\lambda^2,$$
$$a_{12} = 0, \quad a_{14} = -9\lambda, \quad a_{24} = -3, \quad a_{34} = 0,$$

bedeuten. Danach ist:

$$\alpha_{11} = 3\lambda^2, \quad \alpha_{22} = -9\lambda^4, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{31} = 6\lambda^4, \quad \alpha_{12} = -3\lambda^3.$$

Der Achsenkegelschnitt λ in (19′) *hat in Punktkoordinaten die beiden Gleichungen*:

$$(20') \qquad \begin{cases} y_1 - 3\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3 - \lambda^3 y_4 = 0, \\ y_1^2 - 3\lambda^2 y_2^2 + 4\lambda^2 y_3 y_1 - 2\lambda y_1 y_2 = 0. \end{cases}$$

Entsprechend ergibt sich für den Kegel (19):

Der Sehnenkegel λ in (19) *hat in Ebenenkoordinaten die beiden Gleichungen:*

$$(20) \qquad \begin{cases} \lambda^3 v_1 + \lambda^2 v_2 + \lambda v_3 + v_4 = 0, \\ 3v_4^2 - \lambda^2 v_3^2 + 4\lambda^2 v_2 v_4 + 2\lambda v_3 v_4 = 0. \end{cases}$$

13. Beziehung von Achsenkegelschnitt und Tangentenfläche. Sieht man daher von den in § 25, **12** auftretenden doppelt zählenden Tangenten ab, so folgt:

Der Achsenkegelschnitt in der Schmiegungsebene λ ist zugleich die Durchschnittskurve der Schmiegungsebene mit der Tangentenfläche.[1]

Der Sehnenkegel des Kurvenpunktes λ wird umhüllt von den durch diesen Punkt gehenden Ebenen der Tangentenfläche.

14. Beziehung von Tangente und Schmiegungsebene zum Sehnenkegel. Dem Sehnenkegel λ in (17) gehört die Tangente λ an, da aus den Gleichungen (16) auch für $\lambda_0 = \lambda$ die Gleichung (17) folgt.

Die Tangentialebene des Sehnenkegels λ in irgendeinem seiner Punkte y_k^0 hat nach (19) die Gleichung:

$$(21) \quad -(y_3^0 - \lambda y_4^0)y_1 + (2y_2^0 - \lambda y_3^0 - \lambda^2 y_4^0)y_2 - (y_1^0 + \lambda y_2^0 - 2\lambda^2 y_3^0)y_3 + \lambda(y_1^0 - \lambda y_2^0)y_4 = 0.$$

Ist nun y_k^0 ein Punkt der Tangente λ, die, wie bemerkt, dem Sehnenkegel λ angehört, so ist nach § 25, (2):

$$(22) \qquad y_1^0 = 3\lambda^2 y_3^0 - 2\lambda^3 y_4^0, \quad y_2^0 = 2\lambda y_3^0 - \lambda^2 y_4^0,$$

und damit wird aus (21):

$$(23) \qquad (y_3^0 - \lambda y_4^0)(y_1 - 3\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3 - \lambda^3 y_4) = 0,$$

also nach § 24, (30) die Gleichung der Schmiegungsebene.

1) Möbius, Werke 1, S. 122 (1827).

Die Tangentialebene des „Sehnenkegels λ“ längs der auf ihm liegenden „Tangente λ“ ist die „Schmiegungsebene λ“.[1]

Der duale Satz lautet:

Die in der „Schmiegungsebene λ“ liegende „Tangente λ“ berührt den „Achsenkegelschnitt λ“ im „Punkte λ“ der Raumkurve.

§ 27. Treff- und Streichlinien.

1. Begriff der Treff- und Streichlinien. Eine Gerade im Raume heißt eine *Trefflinie*[2] *(Unisekante, Transversale)*, wenn sie wenigstens *einen* Punkt der Raumkurve enthält; eine *Streichlinie (Uniplanare, Linie in einer Ebene)*, wenn wenigstens *eine* Schmiegungsebene durch sie hindurchgeht.

Die Trefflinien zerfallen in Trefflinien im engeren Sinne, die nur einen Punkt mit der Raumkurve gemein haben, und Sehnen (§ 25, 2); die Streichlinien ebenso in Streichlinien im engeren Sinne und Achsen (§ 25, 2).

2. Der Komplex der Trefflinien. Soll eine Gerade mit den Achsenkoordinaten s_k durch den Kurvenpunkt § 24, (22) gehen, oder eine Gerade mit den Strahlenkoordinaten r_k in der Schmiegungsebene § 24, (22′) liegen, so müssen die Bedingungen erfüllt sein (I § 59, (9); (11)):

$$(1)\quad s_3\lambda^2 - s_2\lambda + s_4 = 0,\quad s_1\lambda - s_3\lambda^3 + s_5 = 0,\quad s_2\lambda^3 - s_1\lambda^2 + s_6 = 0,$$
$$s_4\lambda^2 + s_5\lambda + s_6 = 0;$$

$$(1')\quad 3r_3 + 3r_2\lambda + r_4\lambda^2 = 0,\quad 3r_1\lambda^2 - r_3 - r_5\lambda^3 = 0,\quad r_2 + 3r_1\lambda - r_6\lambda^3 = 0,$$
$$r_4 - 3r_5\lambda + 3r_6\lambda^2 = 0.$$

Aus der ersten und vierten Gleichung folgt jedesmal:

$$(2)\qquad \lambda^2 : \lambda : 1 = -s_2s_6 - s_4s_5 : s_4^2 - s_3s_6 : s_3s_5 + s_2s_4;$$

$$(2')\qquad 1 : \lambda : \lambda^2 = 9r_2r_6 + 3r_4r_5 : r_4^2 - 9r_3r_6 : -9r_3r_5 - 3r_2r_4$$

und danach unter Elimination von λ bezüglich:

$$(s_4^2 - s_3s_6)^2 + (s_2s_6 + s_4s_5)(s_3s_5 + s_2s_4) = 0;$$
$$(r_4^2 - 9r_3r_6)^2 + (9r_2r_6 + 3r_4r_5)(9r_3r_5 + 3r_2r_4) = 0.$$

Hiervon die Identitäten (I § 59, (5)):

$$s_3s_6(s_1s_4 + s_2s_5 + s_3s_6) = 0;\quad 81r_3r_6(r_1r_4 + r_2r_5 + r_3r_6) = 0$$

abgezogen und den nicht identisch verschwindenden Faktor s_4 oder r_4 weggehoben, gibt den Satz:

---

1) Fr. Seydewitz, Arch. Math. Phys. 10 (1847), S. 208.

2) Lindemann, Vorles. Geom. Raum (1891) S. 243.

Alle Trefflinien und alle Streichlinien der Raumkurve § 24, (22); (22′) *bilden je einen Komplex 3. Grades mit der Gleichung:*[1])

(3) $$s_4^3 + s_2^2 s_6 + s_5^2 s_3 + s_2 s_4 s_5 - s_1 s_3 s_6 - 2 s_3 s_4 s_6 = 0;$$

(3′) $$r_4^3 + 27 r_2^2 r_6 + 27 r_5^2 r_3 + 9 r_2 r_4 r_5 - 81 r_1 r_3 r_6 - 18 r_3 r_4 r_6 = 0.$$

3. Komplexkegel und Komplexkurve. Die durch einen Punkt P des Raumes gehenden Trefflinien bilden den *Komplexkegel des Punktes* P, einen *Kegel 3. O.* (I § 72, **12**). Die durch P gehende Sehne (§ 26, **1**) bildet einen Doppelstrahl des Kegels.

Die in einer Ebene Π des Raumes liegenden Trefflinien bilden die *Komplexkurve der Ebene* Π, eine Kurve 3. Kl. (I § 72, **12**), die in die drei Strahlbüschel zerfällt, deren Mittelpunkte die drei in der Ebene Π enthaltenen Punkte der Raumkurve sind.

Das dual Entsprechende gilt für den Komplex der Streichlinien.

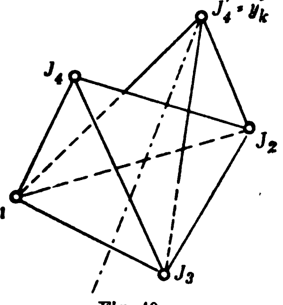


Fig. 49.

4. Rationale Parameterdarstellung des Komplexkegels. Führt man bei fest bleibenden Ecken J_1, J_2, J_3 an Stelle von J_4 einen andern Punkt $J_4' = y_k^0$ als Ecke des Koordinatentetraeders ein (Fig. 49), so bestehen zwischen alten y_k und neuen Koordinaten z_k die Gleichungen (I § 63, (25)):

(4) $$y_1 = z_1 + y_1^0 z_4, \quad y_2 = z_2 + y_2^0 z_4, \quad y_3 = z_3 + y_3^0 z_4, \quad y_4 = y_4^0 z_4;$$

(5) $$y_4^0 z_1 = y_4^0 y_1 - y_1^0 y_4, \quad y_4^0 z_2 = y_4^0 y_2 - y_2^0 y_4, \quad y_4^0 z_3 = y_4^0 y_3 - y_3^0 y_4,$$
$$y_4^0 z_4 = y_4.$$

I. *Die Parameterdarstellung* § 24, (22) *wird daher im neuen System:*

(6) $$\sigma z_1 = y_4^0 \lambda^3 - y_1^0, \quad \sigma z_2 = y_4^0 \lambda^2 - y_2^0, \quad \sigma z_3 = y_4^0 \lambda - y_3^0, \quad \sigma z_4 = 1.$$

Da aber allen Punkten einer durch J_4' gehenden Geraden dieselben Verhältnisse $z_1 : z_2 : z_3$, zugleich die Koordinaten des Strahles im Bündel, zukommen (I § 57, **15**), so folgt:

II. *Die Parameterdarstellung des vom Punkte* y_k^0 *über der Raumkurve errichteten Kegels 3. O. lautet in laufenden Koordinaten* z_1, z_2, z_3 *des Strahles im Bündel:*

(7) $$\sigma z_1 = y_4^0 \lambda^3 - y_1^0, \quad \sigma z_2 = y_4^0 \lambda^2 - y_2^0, \quad \sigma z_3 = y_4^0 \lambda - y_3^0.$$

In entsprechender Weise wird die in einer Ebene v_k^0 liegende Komplexkurve 3. Kl. des Komplexes der Streichlinien rational dargestellt.

1) Lindemann, ebd. S. 244; 248.

5. Übergang auf den Sehnenkegel. Ist y_k^0 ein Punkt λ_0 der Raumkurve selbst, so wird aus (7) nach § 24, (22):

$$(8)\quad \sigma z_1 = (\lambda - \lambda_0)(\lambda^2 + \lambda_0\lambda + \lambda_0^2),\quad \sigma z_2 = (\lambda - \lambda_0)(\lambda + \lambda_0),\quad \sigma z_3 = \lambda - \lambda_0.$$

Dem Parameterwerte $\lambda = \lambda_0$, für den $z_1 : z_2 : z_3$ unbestimmt wird, entspricht *das Bündel aller durch den Punkt* λ_0 *gehenden Strahlen,* die sämtlich Treffgerade sind. Dagegen bedeutet:

$$(6)\qquad \sigma z_1 = \lambda^2 + \lambda_0\lambda + \lambda_0^2,\quad \sigma z_2 = \lambda + \lambda_0,\quad \sigma z_3 = 1$$

den Sehnenkegel 2. O. des Punktes λ_0. In der Tat folgt aus (9) durch Elimination von σ und λ:

$$(10)\qquad z_2^2 - z_1 z_3 - \lambda_0 z_2 z_3 + \lambda_0^2 z_3^2 = 0$$

und diese Gleichung geht vermittels (5) in die mit $\lambda = \lambda_0$ gebildete Gleichung § 26, (19) über.

6. Schmiegungsstrahlen. Eine Gerade, die sowohl mit dem Punkte λ der Kurve, als mit der zugehörigen *Schmiegungsebene* λ vereinigt liegt, heißt ein *Schmiegungsstrahl.*[1])

I. Er ist *gleichzeitig Treff- und Streichlinie.* Umgekehrt *ist jede Gerade, die Treff- und Streichlinie zugleich ist, ein Schmiegungsstrahl.* Denn als Trefflinie enthält sie einen Kurvenpunkt λ' und als Streichlinie liegt sie in einer Schmiegungsebene λ; diese aber enthält keinen andern Kurvenpunkt als ihren Schmiegungspunkt λ, daher muß $\lambda' = \lambda$ sein. Die Linienkoordinaten eines Schmiegungsstrahles genügen daher, bei gleichem λ, beiden Systemen (1) und (1′). Die erste Gleichung (1) lautet aber, aus Achsenkoordinaten s_k in Strahlenkoordinaten r_k übertragen (I § 59, (7)):

$$r_6\lambda^2 - r_5\lambda + r_1 = 0$$

und gibt, mit der vierten (1′) kombiniert:

$$(11)\qquad 3r_1 - r_4 = 0$$

II. *Alle Schmiegungsstrahlen gehören dem linearen Komplex* § 25, (8) *an.*[2])

7. Das Strahlbündel an einem Kurvenpunkte. Der Punkt λ_0 der Raumkurve ist nach § 24, (22) der Schnittpunkt der drei Ebenen:

$$(12)\qquad y_1 - \lambda_0 y_2 = 0,\quad y_2 - \lambda_0 y_3 = 0,\quad y_3 - \lambda_0 y_4 = 0.$$

1) Reye, G. d. L. 2 (4. Aufl. 1907), S. 175. H. Schubert, Kalkül d. abzähl. Geom. (1879), S. 163.

2) R. Sturm, J. f. Math. 86 (1879), S 123; Math. Ann. 26 (1886), S. 488. — Reye, G. d. L. 2 (4. Aufl. 1907), S. 177.

I. *Daher stellt, bei laufenden Parametern* $\varrho:\sigma:\tau$, *die Proportion* (I § 53, (6)):

$$(13)\qquad y_1-\lambda_0 y_2 : y_2-\lambda_0 y_3 : y_3-\lambda_0 y_4=\varrho:\sigma:\tau$$

alle Strahlen des Bündels am Punkte λ_0 *dar.*

Soll die Gerade (13) eine Sehne sein, muß sie außer λ_0 noch einen Punkt λ der Kurve § 24, (22) enthalten, so daß:

$$\lambda^3-\lambda_0\lambda^2 : \lambda^2-\lambda_0\lambda : \lambda-\lambda_0=\lambda^2:\lambda:1=\varrho:\sigma:\tau.$$

Die Parameter müssen also die Bedingung erfüllen:

$$(14)\qquad \varrho\tau-\sigma^2=0.$$

Umgekehrt, wenn die Bedingung (14) erfüllt ist, kann man:

$$(15)\qquad \varrho:\sigma=\sigma:\tau=\lambda$$

setzen und erhält aus (13):

$$(16)\qquad y_1-\lambda_0 y_2 : y_2-\lambda_0 y_3 : y_3-\lambda_0 y_4=\lambda^2:\lambda:1,$$

woraus die Gleichungen der Sehne $\lambda_0\lambda$ in § 25, (1) folgen.

II. *Die Gerade (13) ist eine Trefflinie im engeren Sinne, die nur einen Punkt* λ_0 *mit der Raumkurve gemein hat, wenn*:

$$(17)\qquad \varrho\tau-\sigma^2\neq 0,$$

dagegen eine Sehne $\lambda_0\lambda$ *unter der Bedingung* (14) *mit dem Werte* (15) *von* λ.

Die Gerade (13) liegt in der durch die Gleichung (§ 24, (30)):

$$(y_1-\lambda_0 y_2)-2\lambda_0(y_2-\lambda_0 y_3)+\lambda_0^2(y_3-\lambda_0 y_4)=0,$$

dargestellten Schmiegungsebene λ_0, wenn die Parameter der Bedingung genügen:

$$(18)\qquad \varrho-2\lambda_0\sigma+\lambda_0^2\tau=0.$$

III. *Die Gerade* (13) *ist ein Schmiegungsstrahl unter der Bedingung* (18). Gleichzeitig bestehen die Bedingungen (15) und (18) nur für die Tangente mit $\lambda=\lambda_0$.

§ 28. Schmiegungstetraeder.

1. Beziehung der kanonischen Koordinaten zur Kurve. Jede Raumkurve 3. O. kann nach § 24, 5 bei Einführung kanonischer Koordinaten in der Form § 24, (22), (22′) dargestellt werden, die bei homogener Schreibweise des Parameters λ, mit $\lambda:\mu$ für λ, und mit Unterdrückung der Faktoren ϱ und σ lauten:

$$(1)\qquad y_1=\lambda^3,\quad y_2=\lambda^2\mu,\quad y_3=\lambda\mu^2,\quad y_4=\mu^3;$$

$$(1')\qquad v_1=\mu^3,\quad v_2=-3\lambda\mu^2,\quad v_3=3\lambda^2\mu,\quad v_4=-\lambda^3.$$

Das hierbei benutzte Koordinatentetraeder hat eine besondere Lage gegen die Raumkurve.

Die Kurvenpunkte $\lambda = 0$, $\mu = 1$ und $\lambda = 1$, $\mu = 0$ sind nach (1) die Ecken J_4 und J_1, die Schmiegungsebenen $\lambda = 0$, $\mu = 1$ und $\lambda = 1$, $\mu = 0$ die Seitenebenen $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_4$ des Tetraeders (I § 57, (16), (16')).

Da ferner nach (1) in der Ebene $y_2 = 0$ die Kurvenpunkte $\lambda = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ (§ 24, **6**), in der Ebene $y_3 = 0$ die Kurvenpunkte $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\mu = 0$ liegen, und nach (1') durch die Ecke $v_2 = 0$ die Schmiegungsebenen $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\mu = 0$, durch die Ecke $v_3 = 0$ die Schmiegungsebenen $\lambda = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ gehen, so folgt mit Rücksicht auf § 24, **8**:

Von dem kanonischen Koordinatentetraeder sind die Eckpunkte J_4 und J_1 zwei Punkte der Raumkurve und die Seitenebenen $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_4$ die zu ihnen gehörigen Schmiegungsebenen, sind ferner die Eckpunkte J_3 und J_2 diejenigen Berührungspunkte in den Schmiegungsebenen $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_4$, die bezüglich in $\mathfrak{l}_4$ und $\mathfrak{l}_1$ liegen, und sind die Seitenebenen $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}_3$ diejenigen Berührungsebenen in den Punkten J_4 und J_1, die bezüglich durch J_1 und J_4 gehen.

Bezeichnen wir also die Eckpunkte kurz durch die nicht homogenen Parameter der drei durch sie gehenden Schmiegungsebenen und die Seitenebenen durch die Parameter der drei in ihnen liegenden Kurvenpunkte (§ 24, **2**), so ist:

$$(2)\quad \begin{cases} J_1 = \infty, \infty, \infty; & J_2 = \infty, \infty, 0; & J_3 = \infty, 0, 0; & J_4 = 0, 0, 0; \\ \mathfrak{l}_1 = 0, 0, 0; & \mathfrak{l}_2 = 0, 0, \infty; & \mathfrak{l}_3 = 0, \infty\ \infty; & \mathfrak{l}_4 = \infty, \infty, \infty. \end{cases}$$

Wir nennen ein solches Tetraeder ein *Schmiegungstetraeder der Raumkurve.*[1])

Hat also die Parameterdarstellung der Raumkurve in einem Koordinatentetraeder die Form (1), (1'), *so ist dieses ein Schmiegungstetraeder.*

2. Bestimmung eines Schmiegungstetraeders durch zwei Parameter. Ein Schmiegungstetraeder ist allgemein durch zwei Kurvenpunkte oder zwei Schmiegungsebenen oder, wenn wir beides zusammenfassen, *durch zwei von einander verschiedene Parameterwerte* α und β bestimmt. Alsdann sind die Ecken P_k und Seitenebenen Π_k im Sinne von (2):

$$(3)\quad \begin{cases} P_1 = \beta, \beta, \beta; & P_2 = \beta, \beta, \alpha; & P_3 = \beta, \alpha, \alpha; & P_4 = \alpha, \alpha, \alpha; \\ \Pi_1 = \alpha, \alpha, \alpha; & \Pi_2 = \alpha, \alpha, \beta; & \Pi_3 = \alpha, \beta, \beta; & \Pi_4 = \beta, \beta, \beta. \end{cases}$$

1) H. Schröter, Math. Ann. 25 (1885), S. 294.

I. *Es sind also P_4 und P_1 zwei beliebige Punkte der Kurve, Π_1 und Π_4 ihre Schmiegungsebenen und Π_2 und Π_3 diejenigen Berührungsebenen in P_4 und P_1, die bezüglich durch P_1 und P_4 gehen.*

Dann entsprechen auch die Punkte P_2 und P_3 den Angaben (3). In der Tat sind die Gleichungen der vier Ebenen Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 nach § 24, (30), (29):

$$(4)\begin{cases} y_1-3\alpha y_2+3\alpha^2 y_3-\alpha^3 y_4=0, & y_1-(2\alpha+\beta)y_2+\alpha(\alpha+2\beta)y_3-\alpha^2\beta y_4=0, \\ y_1-(\alpha+2\beta)y_2+\beta(2\alpha+\beta)y_3-\alpha\beta^2 y_4=0, & y_1-3\beta y_2+3\beta^2 y_3-\beta^3 y_4=0. \end{cases}$$

Die vier Ebenen bilden stets ein wirkliches Tetraeder, da die Determinante der Koeffizienten $(\alpha-\beta)^6$ ist. Die Koordinaten der Punkte (3) sind ebenso nach § 24, (30'), (29'):

$$(5)\qquad \begin{aligned} &P_1=\beta^3,\ \beta^2,\ \beta,\ 1; \quad P_2=3\alpha\beta^2,\ \beta(2\alpha+\beta),\ \alpha+2\beta,\ 3; \\ &P_3=3\alpha^2\beta,\ \alpha(\alpha+2\beta),\ 2\alpha+\beta,\ 3; \quad P_4=\alpha^3,\ \alpha^2,\ \alpha,\ 1. \end{aligned}$$

Diese Koordinaten von P_2 und P_3 genügen aber je den Gleichungen der drei ungleichnamigen Ebenen (4).

II. *Bei beliebigen Werten von α und β, $\alpha \neq \beta$, bilden die Ebenen* (4) *und die Punkte* (5) *ein Schmiegungstetraeder.*

3. Einführung eines Schmiegungstetraeders als Koordinatentetraeder. Um von dem Koordinaten-Tetraeder der Darstellung (1) auf das der Ebenen (4) überzugehen, dienen die Transformationsformeln[1]):

$$(6)\quad \begin{cases} z_1=(\beta-\gamma)^3\{y_1-3\alpha y_2+3\alpha^2 y_3-\alpha^3 y_4\}, \\ z_2=(\beta-\gamma)^2(\alpha-\gamma)\{y_1-(2\alpha+\beta)y_2+\alpha(\alpha+2\beta)y_3-\alpha^2\beta y_4\}, \\ z_3=(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2\{y_1-(\alpha+2\beta)y_2+\beta(2\alpha+\beta)y_3-\alpha\beta^2 y_4\}, \\ z_4=(\alpha-\gamma)^3\{y_1-3\beta y_2+3\beta^2 y_3-\beta^3 y_4\}, \end{cases}$$

wo z_k die neuen Punktkoordinaten und γ ein Wert des Parmeters λ ist, durch den der Einheitspunkt der neuen Koordinaten bestimmt werden soll (I § 57, 9).

Setzt man in (6) die Werte § 24, (22) der y_k ein, so erhält man:

$$(7)\quad \begin{cases} \varrho z_1=(\beta-\gamma)^3(\lambda-\alpha)^3, & \varrho z_2=(\beta-\gamma)^2(\alpha-\gamma)(\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta), \\ \varrho z_3=(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)^2, & \varrho z_4=(\alpha-\gamma)^3(\lambda-\beta)^3, \end{cases}$$

oder mit dem neuen Parameter:

$$(8)\qquad \lambda'=\frac{(\beta-\gamma)(\lambda-\alpha)}{(\alpha-\gamma)(\lambda-\beta)}$$

und mit anderem ϱ:

$$(9)\qquad \varrho z_1=\lambda'^3,\quad \varrho z_2=\lambda'^2,\quad \varrho z_3=\lambda',\quad \varrho z_4=1.$$

1) Cremona, Ann. di mat. 1 (2858), S. 289.

I. *In jedem durch irgend zwei getrennte Punkte $\lambda = \alpha$ und $\lambda = \beta$ der Kurve bestimmten Schmiegungstetraeder kann die Parameterdarstellung in die kanonische Form gebracht werden.*[1])

II. *Den Werten $\lambda = \alpha, \beta, \gamma$ des alten Parameters entsprechen nach* (8) *die Werte $\lambda' = 0, \infty, 1$ des neuen.*

4. Die Kanten des Schmiegungstetraeders. Die Kante $J_1 J_4$ in dem Schmiegungstetraeder unter **1** ist als Verbindungslinie zweier Kurvenpunkte J_4 und J_1 eine Sehne (Fig. 50) und die Kante $J_2 J_3$ als Schnittlinie der zugehörigen Schmiegungsebenen $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_4$ die zugehörige Achse (§ 26, 7). Die Kante $J_1 J_2$ ist, als Schnittlinie zweier Berührungsebenen im Punkte J_1, nämlich der Schmiegungsebene $\mathfrak{l}_4$ und der Tangentialebene $\mathfrak{l}_3$, nach § 25, **5** Tangente in J_1 und in $\mathfrak{l}_4$. Ebenso ist $J_3 J_4$, als Schnittlinie der Schmiegungsebene $\mathfrak{l}_1$ und der Tangentialebene $\mathfrak{l}_2$ in J_4, Tangente in J_4 und in $\mathfrak{l}_1$. Die Kante $J_1 J_3$ ist Trefflinie in J_1 und Streichlinie in $\mathfrak{l}_4$, also nach § 27, **6** Schmiegungsstrahl; ebenso die Kante $J_2 J_4$, die durch J_4 geht und in $\mathfrak{l}_1$ liegt.

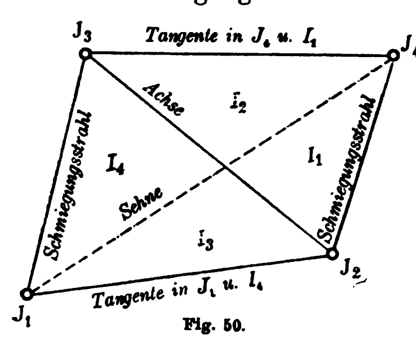


Fig. 50.

In einem Schmiegungstetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ (Fig. 50) sind die Gegenkanten $J_1 J_4$ und $J_2 J_3$ zusammengehörige Sehne und Achse, die Gegenkanten $J_1 J_2$ und $J_3 J_4$ Tangenten und die Gegenkanten $J_1 J_3$ und $J_2 J_4$ Schmiegungsstrahlen.[2])

5. Sehne in vereinigter Lage mit zwei Kanten. Die beiden Kanten $J_1 J_3$ und $J_2 J_4$, die Schmiegungsstrahlen sind, haben (I § 59, (21')) die Achsenkoordinaten 0, 0, 0, 0, 1, 0 und 0, 1, 0, 0, 0, 0. Die Bedingung, daß eine Gerade s_k eine solche Kante schneidet, ist daher bezüglich:

$$s_2 = 0; \quad s_5 = 0.$$

Soll eine *Sehne* $s_k = \lambda_1; \lambda_2$ oder mit homogener Bezeichnung des Parameters $s_k = \lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2$ eine solche Kante schneiden, muß nach § 26, (6'') bezüglich:

$$(10) \qquad (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \mu_1 \mu_2 = 0; \quad (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

1) Über kollineare Transformationen der Raumkurve 3. O. in sich vgl. R. Sturm, Math. Ann. 26 (1886), S. 489; S. Lie, Transformationsgruppen 3 (1893), S. 185; F. Klein, Autograf. Hefte, Geom. 1 (1893), S. 391. Über die Bedeutung des Einheitspunktes vgl. A. Voss, Jahrb. Math. Vereinig. 22 (1913), S. 107.

2) R. Sturm, Math. Ann. 26 (1886), S. 488.

Das gleichzeitige Bestehen dieser Bedingungen erfordert, wenn wir von der Sehne $J_1 J_4 : \lambda_1 = 0,\ \mu_1 = 1;\ \lambda_2 = 1,\ \mu_2 = 0$ oder $\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 0;\ \lambda_2 = 0,\ \mu_2 = 1$ absehen:

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = 0. \tag{11}$$

Entsprechendes gilt für eine *Achse* $\lambda_1 \times \lambda_2$, also:

Diejenigen Sehnen $\lambda_1 \lambda_2$ und Achsen $\lambda_1 \times \lambda_2$, welche der Bedingung:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{12}$$

genügen, schneiden jede der beiden Kanten $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$ des Schmiegungstetraeders.

6. Harmonische Teilung der Sehnen. Jeder Punkt der Sehne, welche entsprechend der Bedingung (12) die beiden Kurvenpunkte $R_1 = \lambda$ und $R_2 = -\lambda$ verbindet, hat nach § 24, (22) Koordinaten von der Form:

$$y_1 = (1 - \tau)\lambda^3,\ y_2 = (1 + \tau)\lambda^2,\ y_3 = (1 - \tau)\lambda,\ y_4 = 1 + \tau, \tag{13}$$

wo τ der längs der Sehne wechselnde Parameter ist.

Die Schnittpunkte Q_1 und Q_2 der Sehne mit den Kanten $J_3 J_1$ $(y_2 = 0,\ y_4 = 0)$ und $J_2 J_4 (y_1 = 0,\ y_3 = 0)$ entsprechen daher den Werten $\tau = -1$ und $\tau = 1$, sind also harmonisch zu R_1 und R_2. Der duale Satz gilt für Achsen, also:

Jede Sehne, welche die beiden Kanten $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$ des Schmiegungstetraeders schneidet, wird von ihnen harmonisch geteilt.[1])

Der Winkel der beiden Schmiegungsebenen einer solchen Achse, welche die beiden Kanten $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$ schneidet, wird von den Verbindungsebenen der Achse mit diesen Kanten harmonisch geteilt.

Diese Sätze gelten nach (9) auch für jedes andere Schmiegungstetraeder $P_1 P_2 P_3 P_4$.

7. Ort der Sehnen. Die Gleichungen der Sehnen und Achsen, welche den Parameterwerten $\lambda_1 = \lambda$ und $\lambda_2 = -\lambda$ entsprechen, sind nach § 25, (1), (1'):

$$y_1 - \lambda^2 y_3 = 0,\ y_2 - \lambda^2 y_4 = 0; \tag{14}$$

$$3\lambda^2 v_1 - v_3 = 0,\ \lambda^2 v_2 - 3 v_4 = 0. \tag{14'}$$

Durch Elimination von λ^2 ergibt sich (vgl. § 24, (33), (33')):

1) L. Cremona, J. f. Math. 58 (1861), S. 147; R. Sturm, Math. Ann. 26 (1886), S. 488.

Die Sehnen, welche die beiden Kanten $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$ schneiden, liegen auf der Fläche 2. O.

(15) $g = y_2 y_3 - y_1 y_4 = 0;$

Die Achsen, welche die beiden Kanten $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$ schneiden, liegen auf der Fläche 2. Kl.

(15′) $G = 9 v_1 v_4 - v_2 v_3 = 0.$

§ 29. Das Polarsystem der Raumkurve 3. Ordnung.

1. Begriff von Polarebene und Pol. Die Raumkurve sei durch die Gleichungen § 24, (22); (22′) gegeben.

Die Verbindungsebene der Schmiegungspunkte der drei durch einen Punkt y_k^0 des Raumes gehenden Schmiegungsebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heißt die Polarebene des Punktes y_k^0.

Der Schnittpunkt der Schmiegungsebenen der drei in einer Ebene v_k^0 des Raumes liegenden Kurvenpunkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heißt der Pol der Ebene v_k^0.

Zwischen y_k^0 oder v_k^0 und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestehen dabei nach § 24, (27′); (27) mit Rücksicht auf § 24, **10**, IV die Gleichungen:

$$y_4^0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = y_1^0, \quad y_4^0(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) = 3 y_2^0, \quad y_4^0(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 3 y_3^0;$$

$$v_1^0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -v_4^0, \quad v_1^0(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) = v_3^0, \quad v_1^0(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -v_2^0,$$

sodaß wiederum aus § 24, (28); (28′) folgt:

Die Gleichung der Polarebene des Punktes y_k^0 lautet in laufenden Punktkoordinaten:

(1) $y_4^0 y_1 - 3 y_3^0 y_2 + 3 y_2^0 y_3 - y_1^0 y_4 = 0.$

Die Koordinaten v_x^0 dieser Ebene sind daher:

(2) $\varrho v_1^0 = y_4^0, \quad \varrho v_2^0 = -3 y_3^0, \quad \varrho v_3^0 = 3 y_2^0, \quad \varrho v_4^0 = -y_1^0.$

Die Gleichung des Poles der Ebene v_k^0 lautet in laufenden Ebenenkoordinaten:

(1′) $-3 v_4^0 v_1 + v_3^0 v_2 - v_2^0 v_3 + 3 v_1^0 v_4 = 0.$

Die Koordinaten y_x^0 dieses Punktes sind daher:

(2′) $\sigma y_1^0 = -3 v_4^0, \quad \sigma y_2^0 = v_3^0, \quad \sigma y_3^0 = -v_2^0, \quad \sigma y_4^0 = 3 v_1^0.$

2. Involutorische Beziehung. Da aber von den Gleichungen (2) und (2′) die einen die Auflösungen der andern sind (mit $\varrho\sigma = 3$), so ergibt sich:

Jede Ebene ist die Polarebene ihres Poles, jeder Punkt der Pol seiner Polarebene.

Je ein Punkt y_k und eine Ebene v_k des Raumes gehören als Pol und Polarebene zusammen und sind, unter Weglassung des Index 0, durch die Gleichungen verbunden:[1])

1) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 21.

(3) $\varrho v_1 = y_4, \ \varrho v_2 = -3y_3, \ \varrho v_3 = 3y_2, \ \varrho v_4 = -y_1;$

(3′) $\sigma y_1 = -3v_4, \ \sigma y_2 = v_3, \ \sigma y_3 = -v_2, \ \sigma y_4 = 3v_1.$

3. Vereinigte Lage. Da die Gleichung (1) durch $y_k = y_k^0$, (1′) durch $v_k = v_k^0$ identisch erfüllt wird, gilt der wichtige Satz:

Pol und Polarebene liegen stets vereinigt.[1])

4. Polarverwandtschaft der Raumkurve mit sich selbst. Ist y_k ein Punkt λ und v_k eine Ebene λ der Raumkurve, so geben die Formeln (3) und (3′) nach § 24, (22); (22′):

$$\varrho v_1 = 1, \quad \varrho v_2 = -3\lambda, \quad \varrho v_3 = 3\lambda^2, \quad \varrho v_4 = -\lambda^3;$$

$$\sigma y_1 = 3\lambda^3, \quad \sigma y_2 = 3\lambda^2, \quad \sigma y_3 = 3\lambda, \quad \sigma y_4 = 3,$$

sodaß wieder nach § 24, (22′); (22) und § 24, **10**, IV folgt:

Die Polarebene eines Punktes der Kurve ist seine Schmiegungsebene.[2])	*Der Pol einer Schmiegungsebene ist ihr Schmiegungspunkt.*[2])

Vermöge (3) gilt für die Ausdrücke § 24, (33); (33′), abgesehen von den Proportionalitätsfaktoren, die Beziehung:

(4) $$f = F, \quad g = G, \quad h = H.$$

Wie die Raumkurve selbst[3]), sind daher auch die zu ihrer Darstellung benutzten Flächen 2. O. und 2. Kl. in § 24, (33); (33′) vermöge (3) untereinander polarverwandt.

5. Polarebenen der Punkte einer Reihe. Die Polarebenen der beiden Punkte $y_k^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$ sind nach (3) mit Unterdrückung des Faktors ϱ:

(5) $$v_1^{(1)} = y_4^{(1)}, \quad v_2^{(1)} = -3y_3^{(1)}, \quad v_3^{(1)} = 3y_2^{(1)}, \quad v_4^{(1)} = -y_1^{(1)};$$
$$v_1^{(2)} = y_4^{(2)}, \quad v_2^{(2)} = -3y_3^{(2)}, \quad v_3^{(2)} = 3y_2^{(2)}, \quad v_4^{(2)} = -y_1^{(2)}$$

und die Polarebene des laufenden Punktes $y_k^{(1)} + \tau y_k^{(2)}$ ihrer Verbindungslinie wieder nach (3):

$$v_1 = y_4^{(1)} + \tau y_4^{(2)}, \quad v_2 = -3(y_3^{(1)} + \tau y_3^{(2)}), \quad v_3 = 3(y_2^{(1)} + \tau y_2^{(2)}),$$
$$v_4 = -(y_1^{(1)} + \tau y_1^{(2)})$$

oder nach (5):

$$v_\varkappa = v_k^{(1)} + \tau v_k^{(2)}.$$

---

1) Chasles, J. de math. (2) 2 (1857), S. 404 (No. 41); H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 39; Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 166; 2 (1859), S. 19.

2) H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 42.

3) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 165; 2 (1859), S. 20; Reye, Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), S. 521; R. Sturm, Math. Ann. 26 (1886), S. 506.

Die Polarebenen aller Punkte einer Punktreihe bilden einen ihr projektiven Ebenenbüschel.	*Die Pole aller Ebenen eines Büschels bilden eine ihm projektive Punktreihe.*

6. Reziproke Polaren. Sind r_x die Strahlenkoordinaten der Geraden $y_k^{(1)} y_k^{(2)}$ und s'_k die Achsenkoordinaten der Geraden $v_k^{(1)} \times v_k^{(2)}$, so ist nach (5):

$$s_1' = 9r_1,\ s_2' = 3r_5,\ s_3' = 3r_6,\ s_4' = r_4,\ s_5' = 3r_2,\ s_6' = 3r_3,$$

oder wenn man die Strahlenkoordinaten r'_k von $v_k^{(1)} \times v_k^{(2)}$ einführt und wieder einen Proportionalitätsfaktor hinzufügt:

$$(6) \quad \varrho r_1' = r_4,\ \varrho r_2' = 3r_2,\ \varrho r_3' = 3r_3,\ \varrho r_4' = 9r_1,\ \varrho r_5' = 3r_5,\ \varrho r_6' = 3r_6.$$

Hieraus folgt umgekehrt mit $\varrho\sigma = 9$:

$$(7) \quad \sigma r_1 = r_4',\ \sigma r_2 = 3r_2',\ \sigma r_3 = 3r_3',\ \sigma r_4 = 9r_1',\ \sigma r_5 = 3r_5',\ \sigma r_6 = 3r_6'.$$

Nennt man daher „Polare" einer Geraden die Schnittlinie der Polarebenen irgend zweier Punkte der Geraden, so ist die Beziehung zwischen der Geraden und ihrer Polaren reziprok.

I. *Zwei Gerade sind reziproke Polaren*[1]*), wenn jede die Schnittlinie der Polarebenen irgend zweier Punkte der anderen oder die Verbindungslinie der Pole irgend zweier Ebenen der andern ist.*[2])

II. *Zwischen den Strahlenkoordinaten r_k und r_k' zweier reziproker Polaren bestehen die Gleichungen* (6) *und* (7).

7. Sehne und Achse als reziproke Polaren. Die Polarebenen zweier Punkte λ_1 und λ_2 der Kurve sind nach **4** die Schmiegungsebenen λ_1 und λ_2. Daraus folgt nach **6**, I:

I. *Die Sehne $s = \lambda_1 \lambda_2$ und die zugehörige Achse $a = \lambda_1 \times \lambda_2$* (§ 26, 7) *sind reziproke Polaren.*[3])

In der Tat stehen die beiderseitigen Strahlenkoordinaten § 26, (6); (6'):

$$(8) \quad \begin{cases} r_1 = \nu,\ r_2 = -\mu\nu,\ r_3 = \nu^2,\ r_4 = \mu^2 - \nu,\ r_5 = \mu,\ r_6 = 1; \\ r_1' = \mu^2 - \nu,\ r_2' = -3\mu\nu,\ r_3' = 3\nu^2,\ r_4' = 9\nu,\ r_5' = 3\mu,\ r_6' = 3 \end{cases}$$

in der Beziehung (6).

Die durch einen Punkt y_k des Raumes gehenden Sehne $\lambda_1 \lambda_2$ und die in einer Ebene des Raumes liegende Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ bestimmen sich nach § 26, (3); (3') aus den Gleichungen:

$$(9) \quad f\lambda^2 + g\lambda + h = 0 \qquad (9') \quad F\lambda^2 + G\lambda + H = 0.$$

1) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 20; Nouv. Ann. (2) 1 (1862), S. 294.
2) H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 42.
3) R. Sturm, Geom. Verw, 3 (1909), S. 110.

Sind nun y_k und v_k Pol und Polarebene, so sind nach (4) beide Gleichungen identisch (vgl. Fig. 51, S. 197):

II. *Die durch einen Punkt P gehende Sehne s und die in seiner Polarebene Π liegende Achse a sind zusammengehörig; die durch die Achse gehenden Schmiegungsebenen gehören zu den Endpunkten der Sehne.*

8. Vereinigte Lage zweier reziproker Polaren. Aus (6) folgt die identische Gleichung (I § 59, (5')):

$$(10) \qquad \varrho(r_1 r_4' + r_2 r_5' + r_3 r_6' + r_4 r_1' + r_5 r_2' + r_6 r_3') = (3r_1 - r_4)^2.$$

Eine Gerade r_k schneidet daher immer dann und nur dann ihre reziproke Polare, wenn sie dem linearen Komplex:

$$(11) \qquad 3r_1 - r_4 = 0$$

angehört. Dann aber ist nach (6):

$$\varrho r_1' = 3r_1, \; \varrho r_2' = 3r_2, \; \varrho r_3' = 3r_3, \; \varrho r_4' = 3r_4, \; \varrho r_5' = 3r_5, \; \varrho r_6' = 3r_6,$$

so daß r_k und r_k' ganz zusammenfallen:

Eine Gerade fällt immer dann und nur dann mit ihrer reziproken Polaren zusamen, wenn sie dem linearen Komplex (11) *angehört. Eine andere Gerade hat überhaupt keinen Punkt mit ihrer reziproken Polaren gemein.*

Der Komplex (11) enthält nach § 25, 8 auch die *Tangenten* der Raumkurve, in denen Sehnen und Achsen (7, I) zusammenfallen, die also ihre eignen reziproken Polaren sind.[1])

9. Polarbeziehungen im Schmiegungstetraeder. In einem Schmiegungstetraeder $P_1 P_2 P_3 P_4$ sind nach § 28, (3) die Ebenen Π_1 und Π_4 mit Rücksicht auf 4 die Polarebenen der Ecken P_4 und P_1. Durch die Ecke P_2 gehen nach § 28, (3) die drei Schmiegungsebenen β, β, α; die Polarebene der Ecke ist daher nach 1 die Verbindungsebene der Punkte β, β, α, also nach § 28, (3) die Ebene Π_3.

I. *In einem Schmiegungstetraeder $P_1 P_2 P_3 P_4$ gehören die Paare P_1 und Π_4, P_4 und Π_1, P_2 und Π_3, P_3 und Π_2 je einer Ecke und einer Seitenfläche als Pol und Polarebene zusammen.*

Die Kanten $J_2 J_3$ und $J_1 J_4$ (Fig. 50) sind als zusammengehörige Achse und Sehne nach 7, I reziproke Polaren, die Kanten $J_1 J_2$ und $J_3 J_4$ als Tangenten ihre eignen reziproken Polaren. Die Polarebenen $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}_4$ zweier Punkte J_3 und J_1 (nach I) der Kante $J_3 J_1$ gehen wieder durch die Kante $J_3 J_1$ nach der Bezeichnung des Tetraeders.

1) Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 42.

Diese Kante ist also ihre eigne reziproke Polare, ebenso $J_2 J_4$. So für jedes Schmiegungstetraeder $P_1 P_2 P_3 P_4$.

II. *Die Kanten $P_1 P_4$ und $P_2 P_3$, die Sehne und Achse sind, sind reziproke Polaren; die übrigen Kanten $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$, die Tangenten, und $P_3 P_1$ und $P_2 P_4$, die Schmiegungsstrahlen sind, sind je ihre eignen reziproken Polaren* (vgl. 8 und § 27, 6 II).

10. Konjugierte Elemente. *Zwei konjugierte Punkte $y_k^{(1)}$* und *$y_k^{(2)}$* oder *zwei konjugierte Ebenen $v_k^{(1)}$* und *$v_k^{(2)}$* sind solche Punkte und Ebenen, die durch die Beziehungen:

$$y_1^{(1)} y_4^{(2)} - 3 y_2^{(1)} y_3^{(2)} + 3 y_3^{(1)} y_2^{(2)} - y_4^{(1)} y_1^{(2)} = 0; \tag{12}$$

$$3 v_1^{(1)} v_4^{(2)} - v_2^{(1)} v_3^{(2)} + v_3^{(1)} v_2^{(2)} - 3 v_4^{(1)} v_1^{(2)} = 0 \tag{12'}$$

verknüpft sind. Es folgt dann aus (1); (1′):

Von zwei konjugierten Punkten liegt jeder in der Polarebene des andern.	*Von zwei konjugierten Ebenen geht jede durch den Pol der andern.*

Die Gleichung der reziproken Polare $r_k^{(1)\prime}$ von $r_k^{(1)}$ in laufenden Strahlenkoordinaten $r_k^{(2)}$ lautet:

$$r_4^{(1)\prime} r_1^{(2)} + r_5^{(1)\prime} r_2^{(2)} + r_6^{(1)\prime} r_3^{(2)} + r_1^{(1)\prime} r_4^{(2)} + r_2^{(1)\prime} r_5^{(2)} + r_3^{(1)\prime} r_6^{(2)} = 0$$

oder nach (6):

$$9 r_1^{(1)} r_1^{(2)} + 3 r_5^{(1)} r_2^{(2)} + 3 r_6^{(1)} r_3^{(2)} + r_4^{(1)} r_4^{(2)} + 3 r_2^{(1)} r_5^{(2)} + 3 r_3^{(1)} r_6^{(2)} = 0. \tag{13}$$

Zwei durch diese in $r_k^{(1)}$ und $r_k^{(2)}$ symmetrische Gleichung verbundene Gerade heißen *konjugierte Gerade.*

Von zwei konjugierten Geraden schneidet jede die reziproke Polare der andern.

Mit $r_k^{(1)} = r_k^{(2)}$ folgt wie in (10):

Eine Gerade fällt mit ihrer konjugierten zusammen, wenn sie dem Komplex (10) *angehört.*

11. Transversale zweier reziproken Polaren. Sind r_k und r_k' zwei reziproke Polaren und r_k^0 eine beliebige Gerade, so ist mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} S &= r_4 r_1^0 + r_5 r_2^0 + r_6 r_3^0 + r_1 r_4^0 + r_2 r_5^0 + r_3 r_6^0, \\ S' &= r_4' r_1^0 + r_5' r_2^0 + r_6' r_3^0 + r_1' r_4^0 + r_2' r_5^0 + r_3' r_6^0 \end{aligned} \tag{14}$$

nach (6) identisch:

$$\varrho S' - 3S = (3 r_1 - r_4)(3 r_1^0 - r_4^0). \tag{15}$$

Ist daher r_k^0 eine Gerade des Komplexes (11), die r_k schneidet ($S = 0$), so schneidet sie auch r_k' ($S' = 0$):

I. *Jede Komplexgerade r_k^0, die eine Gerade r_k schneidet, schneidet auch deren reziproke Polare r_k'.*

Ist aber r_k^0 eine Gerade, welche zwei getrennte, also nach 8 nicht dem Komplex angehörige reziproke Polaren schneidet ($S = 0$, $S' = 0$, $3r_1 - r_4 \neq 0$), so gehört sie nach (15) dem Komplex an:

II. *Jede gemeinsame Transversale von zwei getrennten reziproken Polaren gehört dem Komplex an.*

12. Hyperboloidische Lage von zwei Paaren. Sind r, r' und r_0, r_0' zwei Paare getrennter reziproker Polaren und t irgend eine gemeinsame Transversale von r, r', r_0, so gehört t nach **11**, II dem Komplex an und schneidet daher nach **11**, I auch r_0':

Zwei Paare getrennter reziproker Polaren liegen hyperboloidisch (Sonderfall in § 26, **9**).

13. Pol und Polarebene im allgemeinen System. Die Rückkehr von dem kanonischen System der Gleichungen § 24, (22) zum allgemeinen der Gleichungen § 24, (1) geschieht nach § 24, (21); § 29, (3) mit $\varrho = 1$; § 24, (19) und gibt:

$$A^2 u_k = \sum_1^4{}^m \{(A_{k1}A_{m4} - A_{k4}A_{m1}) - 3(A_{k2}A_{m3} - A_{k3}A_{m2})\} x_m,$$

oder wenn man (I Anm. 1, III, (9)) die Unterdeterminanten 2. Grades α_{kl} der a_{kl} einführt:

$$(16)\begin{cases} Au_1 = \phantom{-(\alpha_{61}-3\alpha_{64})x_1} (\alpha_{61} - 3\alpha_{64})x_2 - (\alpha_{51} - 3\alpha_{54})x_3 + (\alpha_{11} - 3\alpha_{14})x_4, \\ Au_2 = -(\alpha_{61} - 3\alpha_{64})x_1 \phantom{-(\alpha_{41}-3\alpha_{44})x_2} + (\alpha_{41} - 3\alpha_{44})x_3 + (\alpha_{21} - 3\alpha_{24})x_4, \\ Au_3 = (\alpha_{51} - 3\alpha_{54})x_1 - (\alpha_{41} - 3\alpha_{44})x_2 \phantom{-(\alpha_{31}-3\alpha_{34})x_3} + (\alpha_{31} - 3\alpha_{34})x_4, \\ Au_4 = -(\alpha_{11} - 3\alpha_{14})x_1 - (\alpha_{21} - 3\alpha_{24})x_2 - (\alpha_{31} - 3\alpha_{34})x_3. \end{cases}$$

Ebenso ergibt sich aus § 24, (18); § 29, (3') mit $\sigma = 3$; § 24, (20):

$$3x_k = \sum_1^4{}^m \{(a_{k2}a_{m3} - a_{k3}a_{m2}) - 3(a_{k1}a_{m4} - a_{k4}a_{m1})\} u_m$$

oder:

$$(17)\begin{cases} 3x_1 = \phantom{-(\alpha_{31}-3\alpha_{34})u_1} (\alpha_{31} - 3\alpha_{34})u_2 - (\alpha_{21} - 3\alpha_{24})u_3 + (\alpha_{41} - 3\alpha_{44})u_4, \\ 3x_2 = -(\alpha_{31} - 3\alpha_{34})u_1 \phantom{-(\alpha_{11}-3\alpha_{14})u_2} + (\alpha_{11} - 3\alpha_{14})u_3 + (\alpha_{51} - 3\alpha_{54})u_4, \\ 3x_3 = (\alpha_{21} - 3\alpha_{24})u_1 - (\alpha_{11} - 3\alpha_{14})u_2 \phantom{-(\alpha_{61}-3\alpha_{64})u_3} + (\alpha_{61} - 3\alpha_{64})u_4, \\ 3x_4 = -(\alpha_{41} - 3\alpha_{44})u_1 - (\alpha_{51} - 3\alpha_{54})u_2 - (\alpha_{61} - 3\alpha_{64})u_3. \end{cases}$$

Zwischen Pol x_k und Polarebene u_k der Raumkurve § 24, (1); (1') *bestehen die Beziehungen* (16) *und* (17), *wo die $\alpha_{\varkappa l}$ die Unterdeterminanten 2. Grades aus den Elementen $a_{\varkappa l}$ bedeuten.*

Die Gleichungen haben die charakteristische Form der *involutorischen Korrelation mit schiefer Determinante* (II § 78, **14**).

14. Der Komplex im allgemeinen System. Die Gleichung (11) wird in Folge von § 24, (24):

$$A^2(3r_1 - r_4) = \sum_1^6{}^m (3\mathsf{A}_{m1} - \mathsf{A}_{m4})p_m \tag{18}$$

oder (I Anm. 1, III, (9)):

$$-\varphi = A(3r_1 - r_4) = \sum_1^6{}^m (3\alpha_{\overline{m}4} - \alpha_{\overline{m}1})p_m, \tag{19}$$

wo $\overline{m}$ den komplementären Index zu m bedeutet.

I. *Die Gleichung des Komplexes* (11) *lautet daher im System der Gleichungen* § 24, (1):

$$\left\{\begin{aligned} &(\alpha_{41} - 3\alpha_{44})p_1 + (\alpha_{51} - 3\alpha_{54})p_2 + (\alpha_{61} - 3\alpha_{64})p_3 \\ &+ (\alpha_{11} - 3\alpha_{14})p_4 + (\alpha_{21} - 3\alpha_{24})p_5 + (\alpha_{31} - 3\alpha_{34})p_6 = 0.\text{[1]}\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Die Determinante der Komplexes (20) ist:

$$\begin{aligned} D = &(\alpha_{41} - 3\alpha_{44})(\alpha_{11} - 3\alpha_{14}) + (\alpha_{51} - 3\alpha_{54})(\alpha_{21} - 3\alpha_{24}) \\ &+ (\alpha_{61} - 3\alpha_{64})(\alpha_{31} - 3\alpha_{34}) \\ &= (\alpha_{11}\alpha_{41} + \alpha_{21}\alpha_{51} + \alpha_{31}\alpha_{61}) + 9(\alpha_{14}\alpha_{44} + \alpha_{24}\alpha_{54} + \alpha_{34}\alpha_{64}) \\ &- 3(\alpha_{11}\alpha_{44} + \alpha_{21}\alpha_{54} + \alpha_{31}\alpha_{64} + \alpha_{41}\alpha_{14} + \alpha_{51}\alpha_{24} + \alpha_{61}\alpha_{34}) = -3A \end{aligned} \tag{21}$$

(I Anm. 1, III, (19); (20)), also bis auf den Faktor -3 die Determinante § 24, (2). Nach der Form der Gleichung (20) folgt:[2])

II. *Das Polarsystem* (16), (17) *der Raumkurve 3. O.* § 24, (1) *ist* (II § 86, (1); (19)) *dasselbe, wie das des linearen Komplexes* (20).

15. Reziproke Polaren im allgemeinen System. Nach § 24, (23), § 29, (6) mit $\varrho = 1$, § 24, (24) folgt für die reziproke Polare p_k' von p_k:

$$\begin{aligned} A^2 p_k' = &\sum_1^6{}^m \{\alpha_{k1}\mathsf{A}_{m4} + 3\alpha_{k2}\mathsf{A}_{m2} + 3\alpha_{k3}\mathsf{A}_{m3} + 9\alpha_{k4}\mathsf{A}_{m1} + 3\alpha_{k5}\mathsf{A}_{m5} \\ &\qquad + 3\alpha_{k6}\mathsf{A}_{m6}\}p_m \\ = &\sum_1^6{}^m \{3(\alpha_{k1}\mathsf{A}_{m1} + \alpha_{k2}\mathsf{A}_{m2} + \alpha_{k3}\mathsf{A}_{m3} + \alpha_{k4}\mathsf{A}_{m4} + \alpha_{k5}\mathsf{A}_{m5} + \alpha_{k6}\mathsf{A}_{m6}) \\ &\qquad - 3(\alpha_{k1}\mathsf{A}_{m1} + \alpha_{k4}\mathsf{A}_{m4}) + \alpha_{k1}\mathsf{A}_{m4} + 9\alpha_{k4}\mathsf{A}_{m1}\}p_m \\ = &\, 3A^2 p_k + (\alpha_{k1} - 3\alpha_{k4})\sum_1^6{}^m (\mathsf{A}_{m4} - 3\mathsf{A}_{m1})p_m \end{aligned}$$

---

1) J. Tannery, Bull. sc. math. 11 (1876), S. 186.

2) H. Schröter, J. f. Math. 56 (1858), S. 43; über die ∞^7 zu einem lin. Komplex gehörenden Raumkurven 3. O. vgl. Reye, Geom. d. L. 2 (1907), S. 200.

(I Anm. 1, III, (18)) und nach (18) und (21):

$$(22)\qquad Ap_k' = -Dp_k + (\alpha_{k1} - 3\alpha_{k4})\varphi.$$

Zwischen den Strahlenkoordinaten zweier reziproken Polaren der Raumkurve § 24, (1) *bestehen die Beziehungen* (22)[1] (II § 86, (24)).

16. Die Möbiusschen Tetraeder. Sind A_1, A_2, A_3, A_4 irgend vier Punkte der Raumkurve 3. O. und $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3, \mathsf{B}_4$ ihre Schmiegungsebenen, so bilden jene ein Tetraeder $\mathfrak{A}$ mit den Seitenebenen:

$$\mathsf{A}_1 = A_2A_3A_4,\quad \mathsf{A}_2 = A_3A_1A_4,\quad \mathsf{A}_3 = A_1A_2A_4,\quad \mathsf{A}_4 = A_1A_2A_3$$

und diese ein zweites Tetraeder $\mathfrak{B}$ mit den Ecken:

$$B_1 = \mathsf{B}_2\times\mathsf{B}_3\times\mathsf{B}_4,\ B_2 = \mathsf{B}_3\times\mathsf{B}_1\times\mathsf{B}_4,\ B_3 = \mathsf{B}_1\times\mathsf{B}_2\times\mathsf{B}_4,\ B_4 = \mathsf{B}_1\times\mathsf{B}_2\times\mathsf{B}_3.$$

Da jeder der Punkte A_k mit seiner Schmiegungsebene B_k vereinigt liegt, so liegen die Ecken A_k des ersten Tetraeders $\mathfrak{A}$ in den gleichnamigen Ebenen B_k des zweiten $\mathfrak{B}$.

Die Ebene A_1 ist eine durch die drei Punkte A_2, A_3, A_4 der Kurve gehende Ebene; daher liegt auch der Schnittpunkt B_1 der drei Schmiegungsebenen $\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3, \mathsf{B}_4$ dieser drei Punkte, als Pol der Ebene A_1, in ihr nach **3**, also B_1 in A_1, und allgemein liegen die Ecken B_k des zweiten Tetraeders $\mathfrak{B}$ in den gleichnamigen Ebenen A_k des ersten $\mathfrak{A}$.

Vier Punkte eines kub. Kegelschnittes bilden ein Tetraeder, ihre Schmiegungsebenen ein zweites. Das eine Tetraeder ist dem andern gleichzeitig ein- und umbeschrieben.[2])

Die Gegenkanten A_1A_2 und A_3A_4 des einen, $B_3B_4 = \mathsf{B}_1\times\mathsf{B}_2$ und $B_1B_2 = \mathsf{B}_3\times\mathsf{B}_4$ des andern sind zwei Sehnen und zugehörige Achsen. Daher folgt aus § 26, **9**:

Je zwei Gegenkanten des einen Tetraeders und die gleichnamigen des andern liegen hyperboloidisch.[3])

§ 30. Projektive Gebilde an der Raumkurve 3. Ordnung.

1. Doppelverhältnis von vier Punkten der Kurve. Die Gleichung der Ebene, welche die feste Sehne $\lambda_1\lambda_2$ in § 25, (1) mit dem laufenden Punkte λ der Kurve verbindet, ist nach § 24, (28):

$$(1)\qquad \{y_1 - (\lambda_1+\lambda_2)y_2 + \lambda_1\lambda_2y_3\} - \lambda\{y_2 - (\lambda_1+\lambda_2)y_3 + \lambda_1\lambda_2y_4\} = 0.$$

1) R. Sturm, J. f. Math. 86 (1879), S. 138.

2) Möbius, J. f. Math. 3 (1828), S. 273; Werke 1, S. 441; (1837) Werke 3, S. 126; J. Neuberg, Liège Mém. (2) 11 (1885), S. 14; P. Muth, Zeitschr. Math. Phys. 37 (1892), S. 117; G. Bauer, Münch. Ber. 27 (1897), S. 359.

3) Möbius, J. f. Math. 10 (1833), S. 336; Werke 1, S. 498; H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 41.

Die Gleichung des Punktes, in welchem die feste Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ in § 25, (1′) von der laufenden Schmiegungsebene λ geschnitten wird, ist ebenso nach § 24, (28′):

$$(1') \quad \{3v_4 + (\lambda_1 + \lambda_2)v_3 + \lambda_1\lambda_2 v_2\} + \lambda\{v_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)v_2 + 3\lambda_1\lambda_2 v_1\} = 0.$$

Für vier Lagen $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda''''$ des laufenden Punktes λ ist das Doppelverhältnis der vier entsprechenden Ebenen (1) und für vier Lagen λ', λ'', λ''', λ'''' der laufenden Schmiegungsebene λ ist das Doppelverhältnis der vier entsprechenden Punkte (1′) (I § 42, **11**; § 46, **5**):

$$(2) \qquad \delta = \frac{(\lambda' - \lambda''')(\lambda'' - \lambda'''')}{(\lambda'' - \lambda''')(\lambda' - \lambda'''')}$$

unabhängig von λ_1, λ_2. Es folgt daher:

Vier Punkte λ', λ'', λ''', λ'''' der Raumkurve haben ein bestimmtes Doppelverhältnis δ, dasjenige der vier Ebenen, welche sie mit irgend einer Sehne (oder Tangente) verbinden.

Vier Schmiegungsebenen λ', λ'', λ''', λ'''' haben ein bestimmtes Doppelverhältnis δ, dasjenige der vier Punkte, in denen sie irgend eine Achse (oder Tangente) schneiden.[1])

Das Doppelverhältnis (2) von vier Punkten ist dasselbe wie das der zugehörigen Schmiegungsebenen.[2])

2. Harmonische Punkte und Punktinvolutionen auf der Kurve. *Vier Punkte* oder *Schmiegungsebenen* heißen *harmonisch*[3]), wenn ihr Doppelverhältnis $\delta = -1$, also:

$$(3) \qquad \lambda'\lambda'' - \tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda'')(\lambda''' + \lambda'''') + \lambda'''\lambda'''' = 0.$$

Daher bilden die unendlich vielen durch eine Gleichung von der Form (II § 8, (8)):

$$(4) \qquad a_{11}\lambda_1\lambda_2 + a_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{22} = 0$$

verbundenen Punktepaare eine *Involution von Punktepaaren auf der Kurve.* Alle diese Punktepaare sind harmonisch zu den durch die quadratische Gleichung:

$$(5) \qquad a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0$$

bestimmten *Doppelpunkten* der Involution.

Ebenso bilden die durch die Gleichung (4) verknüpften Paare von Schmiegungsebenen λ_1, λ_2 eine *Involution von Ebenenpaaren an der Kurve* mit den Doppelebenen (5).

---

1) H. Schröter, J. f Math. 56 (1859), S. 29; 30.

2) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 165; Reye, G. d. L. **2** (1907), S. 176.

3) v. Staudt, Beiträge (1860), S. 321; Reye, a. a. O., S. 165.

3. Projektive Ebenenbüschel an zwei Sehnen. Die Ebenenbüschel, welche zwei feste Sehnen $\lambda_1\lambda_2$ und $\lambda_3\lambda_4$ mit dem laufenden Punkte λ verbinden:

$$(6)\quad \begin{cases} \{y_1-(\lambda_1+\lambda_2)y_2+\lambda_1\lambda_2y_3\}-\lambda\{y_2-(\lambda_1+\lambda_2)y_3+\lambda_1\lambda_2y_4\}=0, \\ \{y_1-(\lambda_3+\lambda_4)y_2+\lambda_3\lambda_4y_3\}-\lambda\{y_2-(\lambda_3+\lambda_4)y_3+\lambda_3\lambda_4y_4\}=0, \end{cases}$$

sind nach der Form ihrer Gleichungen (I § 66, (10)) projektiv. Sie haben keine Ebene entsprechend gemein. Denn wenn die Ebenen (6) bei gleichem λ zusammenfielen, müßten auch ihre Schnittpunkte $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ und $\lambda, \lambda_3, \lambda_4$ mit der Kurve dieselben sein, also auch die Sehnen $\lambda_1\lambda_2$ und $\lambda_3\lambda_4$ dieselben sein. Dagegen können die Sehnen mit $\lambda_2=\lambda_3$ „anschließend" sein.

Die Verbindungsebenen zweier festen Sehnen mit dem laufenden Punkte der Kurve bilden zwei projektive Ebenenbüschel, die keine Ebene entsprechend gemein haben.[1]

Die Schnittpunkte zweier festen Achsen mit der laufenden Schmiegungsebene bilden zwei projektive Punktreihen, die keinen Punkt entsprechend gemein haben.

Da bei der kub. Parabel die unendlich ferne Ebene Schmiegungsebene ist (§ 7, **10**), so geht aus dem Satze rechts hervor (II § 13, **19**):

Bei der kub. Parabel werden zwei feste Achsen von der laufenden Schmiegungsebene in ähnlichen Punktreihen geschnitten.[2]

4. Projektive Ebenenbündel an zwei Punkten. Die Gleichung des Bündels von Ebenen, welche den festen Punkt λ_1 der Kurve mit der laufenden Sehne $\lambda\lambda'$ verbinden, lautet nach § 24, (28), wenn $\lambda+\lambda' = -\mu$, $\lambda\lambda'=\nu$ gesetzt wird:

$$(7)\qquad (y_1-\lambda_1y_2)+\mu(y_2-\lambda_1y_3)+\nu(y_3-\lambda_1y_4)=0,$$

und ebenso für einen zweiten festen Punkt λ_2:

$$(8)\qquad (y_1-\lambda_2y_2)+\mu(y_2-\lambda_2y_3)+\nu(y_3-\lambda_2y_4)=0.$$

Die beiden Bündel (7) und (8) sind nach der Form ihrer Gleichungen (I § 68, (10)) projektiv. Bei gleichen Werten von μ und ν können die Ebenen (7) und (8) nicht zusammenfallen, ohne daß $\lambda_1=\lambda_2$.

Die Verbindungsebenen zweier fester Punkte der Kurve mit der laufenden Sehne bilden zwei projektive Ebenenbündel[3]*, die keine Ebene entsprechend gemein haben.*

Dual *schneidet die laufende Achse zwei feste Schmiegungsebenen in projektiven Punktfeldern.*[3]

1) Chasles, J. de math. (2) 2 (1857), S. 399 (Nr. 9).
2) H. Schröter, Math. Ann. 25 (1885), S. 295.
3) Fr. Seydewitz, Arch. Math. Phys. 10 (1847), S. 207; 213 für lauf. Tangente.

5. Projektive Strahlbündel an zwei Punkten. Die Gleichungen des Bündels von Treffgeraden, die durch einen Punkt λ_1 der Kurve gehen, sind nach § 27, (13):

(9) $$y_1 - \lambda_1 y_2 : y_2 - \lambda_1 y_3 : y_3 - \lambda_1 y_4 = \varrho : \sigma : \tau,$$

und ebenso für einen zweiten Punkt $\lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0)$:

(10) $$y_1 - \lambda_2 y_2 : y_2 - \lambda_2 y_3 : y_3 - \lambda_2 y_4 = \varrho : \sigma : \tau.$$

Die beiden Strahlbündel (9) und (10) sind nach der Form ihrer Gleichungen (I § 68, (20)) projektiv, wenn gleichen Verhältnissen $\varrho : \sigma : \tau$ entsprechende Strahlen zugehören. Im allgemeinen werden sich entsprechende Strahlen nicht schneiden. Soll jedoch ein Punkt y_k der Schnittpunkt von zwei entsprechenden Strahlen sein, muß er den Bedingungen:

(11) $$y_1 - \lambda_1 y_2 : y_2 - \lambda_1 y_3 : y_3 - \lambda_1 y_4 = y_1 - \lambda_2 y_2 : y_2 - \lambda_2 y_3 : y_3 - \lambda_2 y_4$$

oder, da:

$$(y_2 - \lambda_1 y_3)(y_3 - \lambda_2 y_4) - (y_3 - \lambda_1 y_4)(y_2 - \lambda_2 y_3) = (\lambda_1 - \lambda_2)(y_2 y_4 - y_3^2)$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2) f, \ldots,$$

mit den Abkürzungen § 24, (33):

(12) $$f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0.$$

Er muß also auf der Kurve selbst liegen. Ist umgekehrt λ ein Punkt der Kurve, so stellen die Gleichungen (9) und (10) nach § 27, (16) mit den übereinstimmenden Werten $\varrho : \sigma : \tau = \lambda^2 : \lambda : 1$ die Sehnen $\lambda_1 \lambda$ und $\lambda_2 \lambda$ dar.

Die Verbindungslinien zweier festen Punkte λ_1 und λ_2 der Kurve mit dem laufenden Punkte λ bilden die sich schneidenden entsprechenden Strahlen zweier projektiven Strahlbündel.[1])

Diese haben keinen Strahl entsprechend gemein, da dem Strahle $\lambda_1 \lambda_2$ des ersten Bündels die Tangente $\lambda_2 \lambda_2$ im Zentrum des zweiten und ebenso dem Strahle $\lambda_2 \lambda_1$ des zweiten die Tangente $\lambda_1 \lambda_1$ im ersten entspricht.

Dual *bilden die Schnittlinien zweier festen Schmiegungsebenen mit der laufenden Schmiegungsebene die vereinigt liegenden entsprechenden Strahlen zweier projektiven Strahlfelder.*

1) Seydewitz, Arch. Math. Phys. 10 (1847), S. 207.

II. Kapitel.

Raumkurve 3. Ordnung und Fläche 2. Ordnung.

§ 31. Flächen 2. Ordnung durch die Raumkurve 3. Ordnung.

1. Schnittpunkte der Fläche 2. O. mit der Raumkurve. Die Punkte und Schmiegungsebenen der Raumkurve 3. O. sind in *kanonischen Koordinaten* durch die Gleichungen § 24, (22), (22′) dargestellt. Soll der Punkt λ der Kurve auf einer *Fläche 2. O.:*

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + a_{44}y_4^2 + 2a_{23}y_2y_3 + 2a_{31}y_3y_1 \\ \qquad + 2a_{12}y_1y_2 + 2a_{14}y_1y_4 + 2a_{24}y_2y_4 + 2a_{34}y_3y_4 = 0 \end{cases}$$

liegen, oder die Schmiegungsebene λ Tangentialebene einer *Fläche 2. Kl.:*

$$(1')\quad \begin{cases} b_{11}v_1^2 + b_{22}v_2^2 + b_{33}v_3^2 + b_{44}v_4^2 + 2b_{23}v_2v_3 + 2b_{31}v_3v_1 \\ \qquad + 2b_{12}v_1v_2 + 2b_{14}v_1v_4 + 2b_{24}v_2v_4 + 2b_{34}v_3v_4 = 0 \end{cases}$$

sein, so muß λ der Bedingung:

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}\lambda^6 + 2a_{12}\lambda^5 + (a_{22} + 2a_{13})\lambda^4 + 2(a_{23} + a_{14})\lambda^3 \\ \qquad + (2a_{24} + a_{33})\lambda^2 + 2a_{34}\lambda + a_{44} = 0, \end{cases}$$

bezüglich der Bedingung:

$$(2')\quad \begin{cases} b_{44}\lambda^6 - 6b_{34}\lambda^5 + 3(3b_{33} + 2b_{24})\lambda^4 - 2(9b_{23} + b_{14})\lambda^3 \\ \qquad + 3(3b_{22} + 2b_{13})\lambda^2 - 6b_{12}\lambda + b_{11} = 0 \end{cases}$$

genügen.

Die Raumkurve 3. O. hat im allgemeinen mit einer Fläche 2. O. sechs Punkte und mit einer Fläche 2. Kl. sechs Ebenen gemein.

2. Flächen 2. O. durch die Raumkurve 3. O. Hat die Raumkurve mit einer Fläche 2. O. *mehr als sechs Punkte* oder mit einer Fläche 2. Kl. *mehr als sechs Ebenen* gemein, so gehören *alle* ihre Punkte der Fläche 2. O., bezüglich *alle* ihre Ebenen der Fläche 2. Kl. an.[1])

Dies tritt ein, wenn die Gleichung 6. Grades in λ, (2) oder (2′), identisch in λ erfüllt ist, also:

$$(3)\quad \begin{cases} a_{11} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{22} + 2a_{13} = 0,\ 2(a_{23} + a_{14}) = 0, \\ \qquad 2a_{24} + a_{33} = 0,\ a_{34} = 0,\ a_{44} = 0 \end{cases}$$

oder:

$$(3')\quad \begin{cases} b_{11} = 0,\ b_{12} = 0,\ 3b_{22} + 2b_{13} = 0,\ 2(9b_{23} + b_{14}) = 0, \\ \qquad 2b_{24} + 3b_{33} = 0,\ b_{34} = 0,\ b_{44} = 0. \end{cases}$$

Ändert man die Bezeichnung dahin ab, daß man:

$$2a_{24} = \varrho,\ 2a_{23} = \sigma,\ 2a_{13} = \tau;\quad b_{22} = -\varrho,\ 2b_{23} = -\sigma,\ b_{33} = -\tau$$

1) H. Müller, Math. Ann. 1 (1869), S. 411.

setzt, so nehmen die den Bedingungen (3) oder (3') entsprechenden Gleichungen (1) oder (1') die Form an:

$$(4) \qquad \varrho(y_2 y_4 - y_3^2) + \sigma(y_2 y_3 - y_1 y_4) + \tau(y_1 y_3 - y_2^2) = 0,$$

$$(4') \qquad \varrho(3v_1 v_3 - v_2^2) + \sigma(9v_1 v_4 - v_2 v_3) + \tau(3v_2 v_4 - v_3^2) = 0,$$

so daß mit den in § 24, (33), (33') eingeführten Abkürzungen:

$$(5) \quad \begin{cases} f = y_2 y_4 - y_3^2, & g = y_2 y_3 - y_1 y_4, & h = y_1 y_3 - y_2^2; \\ F = 3v_1 v_3 - v_2^2, & G = 9v_1 v_4 - v_2 v_3, & H = 3v_2 v_4 - v_3^2 \end{cases}$$

der Satz gilt:

Eine Fläche 2. O. enthält immer dann und nur dann die ganze Raumkurve 3. O., wenn ihre Gleichung die Form:[1])

$$(6) \qquad \varrho f + \sigma g + \tau h = 0$$

hat, und eine Fläche 2. Kl. enthält ebenso alle Schmiegungsebenen der Raumkurve als Tangentialebenen, wenn ihre Gleichung die Form:

$$(6') \qquad \varrho F + \sigma G + \tau H = 0$$

hat.

Jede dieser Gleichungen stellt mit den beiden Parameterverhältnissen $\varrho : \sigma : \tau$ ein *lineares System* von ∞^2 Flächen dar, ein *Flächenbündel*, bezüglich eine *Scharschar.*

Jede Fläche ϱ, σ, τ des einen Systems ist nach § 29, (4) *polarverwandt* der Fläche ϱ, σ, τ des andern.

3. Die eigentlichen Flächen des Bündels. Die *Determinante* der Fläche (4) ist, wenn die Gleichung (4) mit 2 multipliziert wird:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau & -\sigma \\ 0 & -2\tau & \sigma & \varrho \\ \tau & \sigma & -2\varrho & 0 \\ -\sigma & \varrho & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\varrho\tau - \sigma^2)^2.$$

Flächen 2. O. mit positiver Determinante sind (II § 153, (21)) Linienflächen oder Flächen ohne reelle Punkte. Das letztere ist ausgeschlossen, da die Raumkurve 3. O. auf den Flächen liegt, also:

Alle Flächen (6) *oder* (6'), *für welche:*

$$(8) \qquad \varrho\tau - \sigma^2 \neq 0$$

sind eigentliche Linienflächen 2. O. und 2. Kl. (einschalige Hyperboloide oder hyperbolische Paraboloide).

4. Die uneigentlichen Flächen des Bündels. Die Unterdeterminanten 3. Grades der Determinante (7) sind:

1) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 279.

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 2\varrho^3 & 2\varrho^2\sigma & \varrho(\varrho\tau+\sigma^2) & (3\varrho\tau-\sigma^2)\sigma \\ 2\varrho^2\sigma & 2\varrho\sigma^2 & (\varrho\tau+\sigma^2)\sigma & (\varrho\tau+\sigma^2)\tau \\ \varrho(\varrho\tau+\sigma^2) & (\varrho\tau+\sigma^2)\sigma & 2\sigma^2\tau & 2\sigma\tau^2 \\ (3\varrho\tau-\sigma^2)\sigma & (\varrho\tau+\sigma^2)\tau & 2\sigma\tau^2 & 2\tau^3 \end{vmatrix}.$$

Ist nun im Gegensatz zu (8):

$$(10)\qquad \varrho\tau-\sigma^2=0,$$

so können wir setzen:

$$(11)\quad \frac{\varrho}{\sigma}=\frac{\sigma}{\tau}=\lambda \quad \text{oder kurz:}\quad (12)\quad \varrho=\lambda^2,\quad \sigma=\lambda,\quad \tau=1.$$

Damit werden die Unterdeterminanten vierter Zeile in (9):

$$(13)\qquad 2\lambda^3,\quad 2\lambda^2,\quad 2\lambda,\quad 2,$$

die der dritten, zweiten und ersten Zeile gleich den Werten (13), bezüglich mit λ, λ^2, λ^3 multipliziert (I Anm. 1, III, (21)). Da die Unterdeterminanten also nicht alle verschwinden können, so folgt:

I. *Alle Flächen* (6) *oder* (6′), *für welche die Bedingung* (10) *besteht, sind eigentliche Kegel 2. O., bezüglich eigentliche Kurven 2. Kl.*

Ferner aber folgt aus (13), daß die Spitzen der Kegel die Koordinaten (II § 139, (8)):

$$(14)\qquad y_1:y_2:y_3:y_4=\lambda^3:\lambda^2:\lambda:1$$

haben oder mit Rücksicht auf § 24, (22):

II. *Der Ort der Spitzen aller im Bündel* (6) *enthaltenen Kegel ist die Raumkurve 3. O. selbst; die Ebenen aller in der Scharschar* (6′) *enthaltenen Kegelschnitte sind die Schmiegungsebenen der Raumkurve.*

In der Tat gehen die Gleichungen (6) und (6′) mit den Werten (12) der Parameter in die Gleichungen § 26, (18) und (18′) der Sehnenkegel und Achsenkegelschnitte der Raumkurve über.

III. *Alle Flächen* (6) *oder* (6′), *für welche die Bedingung* (10) *besteht, sind Sehnenkegel oder Achsenkegelschnitte.*

5. Elementarteiler der im Bündel enthaltenen Büschel. Zwei Flächen ϱ, σ, τ und ϱ', σ', τ' des Bündels (6) bestimmen einen *Büschel:*

$$(15)\qquad \begin{cases} (\varrho f+\sigma g+\tau h)+\omega(\varrho' f+\sigma' g+\tau' h) \\ \quad =(\varrho+\omega\varrho')f+(\sigma+\omega\sigma')g+(\tau+\omega\tau')h=0 \end{cases}$$

mit dem Parameter ω.

Die Determinante des Büschels ist nach (7), wo nur $\varrho+\omega\varrho'$, $\sigma+\omega\sigma'$, $\tau+\omega\tau'$ für ϱ, σ, τ zu setzen ist:

$$(16)\qquad \begin{cases} \Delta(\omega)=\{(\varrho+\omega\varrho')(\tau+\omega\tau')-(\sigma+\omega\sigma')^2\}^2 \\ \quad =\{(\varrho\tau-\sigma^2)+(\varrho\tau'-2\sigma\sigma'+\varrho'\tau)\omega+(\varrho'\tau'-\sigma'^2)\omega^2\}^2. \end{cases}$$

Sie hat daher entweder zwei Doppelwurzeln ω oder, falls:

$$(17)\qquad 4(\varrho\tau-\sigma^2)(\varrho'\tau'-\sigma'^2)-(\varrho\tau'-2\sigma\sigma'+\varrho'\tau)^2=0$$

ist, eine vierfache Wurzel. Die Unterdeterminanten 3. Grades von $\Delta(\omega)$ können nach (9) niemals verschwinden, ohne daß $\varrho+\omega\varrho'$, $\sigma+\omega\sigma'$, $\tau+\omega\tau'$, die für ϱ, σ, τ eintreten, alle verschwinden und daher die Flächen ϱ, σ, τ und ϱ', σ', τ' identisch sind. Es folgt also mit Rücksicht auf **4**, III:

I. *Jedes in dem Bündel* (6) *enthaltene Büschel* (15) *enthält zwei doppelt zählende Sehnenkegel oder einen vierfach zählenden.*

Die beiden Sehnenkegel haben als solche eine Sehne, die Verbindungslinie ihrer Spitzen, bei ihrem Zusammenfall eine Tangente gemein. Die Sehne oder Tangente bildet, zusammen mit der Raumkurve selbst, die *Grundkurve 4. O. des Büschels* oder:

II. *Der vollständige Durchschnitt irgend zweier durch die Raumkurve gehenden Flächen 2. O. besteht aus der Raumkurve und einer ihrer Sehnen oder Tangenten* (§ 36, **12**).

6. Bestimmung der Sehne in einem gegebenen Büschel. Aus den Gleichungen § 25, (1) der Sehne $\lambda_1\lambda_2$ folgt, wie schon § 26, (2) bemerkt, die Proportion:

$$(18)\qquad f:g:h=1:-(\lambda_1+\lambda_2):\lambda_1\lambda_2.$$

Aber auch umgekehrt folgt aus (18) mit einem Proportionalitätsfaktor $\varkappa$:

$$f=\varkappa,\quad g=-\varkappa(\lambda_1+\lambda_2),\quad h=\varkappa\lambda_1\lambda_2$$

und, da nach (5) identisch in y_1, y_2, y_3, y_4:

$$(19)\qquad fy_1+gy_2+hy_3=0,\quad fy_2+gy_3+hy_4=0,$$

wiederum, wie in § 25, (1):

$$(20)\qquad y_1-(\lambda_1+\lambda_2)y_2+\lambda_1\lambda_2y_3=0,\quad y_2-(\lambda_1+\lambda_2)y_3+\lambda_1\lambda_2y_4=0.$$

I. *Die Proportion* (18) *ist also für die Punkte $y_\varkappa$ der Sehne $\lambda_1\lambda_2$ charakteristisch.*

Soll nun die Sehne (18) auf allen Flächen des Büschels (15) liegen, muß identisch in ω:

$$(\varrho+\omega\varrho')-(\sigma+\omega\sigma')(\lambda_1+\lambda_2)+(\tau+\omega\tau')\lambda_1\lambda_2=0,$$

also einzeln:

$$\varrho-\sigma(\lambda_1+\lambda_2)+\tau\lambda_1\lambda_2=0,\quad \varrho'-\sigma'(\lambda_1+\lambda_2)+\tau'\lambda_1\lambda_2=0$$

sein, woraus sich ergibt:

$$(21)\qquad 1:-(\lambda_1+\lambda_2):\lambda_1\lambda_2=\sigma\tau'-\tau\sigma':\tau\varrho'-\varrho\tau':\varrho\sigma'-\sigma\varrho'.$$

Die Gleichungen der Sehne lauten daher nach (20):

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \varrho & \sigma & \tau \\ \varrho' & \sigma' & \tau' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ \varrho & \sigma & \tau \\ \varrho' & \sigma' & \tau' \end{vmatrix} = 0.$$

II. *Die Endpunkte λ_1, λ_2 der Sehne, welche zwei Flächen ϱ, σ, τ und ϱ', σ', τ' des Bündels* (6), *außer der Raumkurve selbst gemein haben, bestimmen sich aus der quadratischen Gleichung:*

$$(23)\qquad (\sigma\tau' - \tau\sigma')\lambda^2 + (\tau\varrho' - \varrho\tau')\lambda + (\varrho\sigma' - \sigma\varrho') = 0.$$

Die Sehne wird *Tangente* unter der mit (17) identischen Bedingung:

$$(24)\qquad 4(\sigma\tau' - \tau\sigma')(\varrho\sigma' - \sigma\varrho') - (\tau\varrho' - \varrho\tau')^2 = 0.$$

7. Bestimmung einer Fläche des Bündels durch zwei Punkte. Jeder *Punkt der Raumkurve* § 24, (33) liegt auf *allen* Flächen des Bündels (6). Soll eine solche Fläche durch zwei *andere* Punkte $y_x^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$ hindurchgehen, müssen die beiden Gleichungen:

$$(25)\qquad \varrho f_1 + \sigma g_1 + \tau h_1 = 0, \quad \varrho f_2 + \sigma g_2 + \tau h_2 = 0$$

bestehen, durch die unteren Indizes die Substitution der Werte $y_k^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$ bezeichnet. Die Gleichungen (25) bestimmen aber die zwei Verhältnisse $\varrho : \sigma : \tau$ eindeutig, wenn nicht:

$$(26)\qquad f_1 : g_1 : h_1 = f_2 : g_2 : h_2$$

ist, was nach (18) bedeutet, daß $y_k^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$ auf derselben Sehne liegen.

Zwei Punkte des Raumes, die nicht auf der Raumkurve und nicht beide auf derselben Sehne liegen, bestimmen stets eine und nur eine Fläche des Bündels.

8. Bestimmung eines Büschels im Bündel durch eine gegebene Sehne. Eine Gerade liegt ganz auf einer Fläche (6), wenn drei Punkte der Geraden auf der Fläche liegen. Bei einer Sehne $\lambda_1\lambda_2$ ist aber nur ein Punkt nötig, da schon die beiden Endpunkte λ_1 und λ_2 als Punkte der Raumkurve auf (6) liegen. Damit also eine Sehne $\lambda_1\lambda_2$ einer Fläche (6) angehört, bedarf es nur einer Bedingung. Diese folgt durch Substitution der charakteristischen Proportion (18) in die Gleichung (6):

I. *Die Sehne $\lambda_1\lambda_2$ gehört der Fläche ϱ, σ, τ des Bündels* (6) *an, wenn:*

$$(27)\qquad \varrho - (\lambda_1 + \lambda_2)\sigma + \lambda_1\lambda_2\tau = 0.$$

Ist λ_1, λ_2 gegeben, so wird durch (27) der eine der drei homogenen Parameter durch die beiden andern ausgedrückt, sodaß die Gleichung (6) mit nur einem Parameterverhältnis ein Büschel darstellt. Es folgt daher als Umkehr des Satzes 5, II:

II. *Die Raumkuve 3. O. bildet zusammen mit jeder ihrer Sehnen oder Tangenten die Grundkurve eines im Bündel* (6) *enthaltenen Büschels.*

9. Sehnen auf gegebener Fläche des Bündels. Betrachtet man dagegen in (27) ϱ, σ, τ als gegeben und λ_1, λ_2 als veränderlich, so ergibt sich (§ 30, (4)):

Auf jeder Fläche ϱ, σ, τ *des Bündels* (6) *liegen unendlich viele der Gleichung* (27) *entsprechende Sehnen, deren Endpunktpaare eine Involution von Punkten der Kurve bilden.*

Die durch die quadratische Gleichung:

$$\varrho - 2\sigma\lambda + \tau\lambda^2 = 0 \tag{28}$$

bestimmten *Doppelpunkte der Involution sind die Berührungspunkte zweier Tangenten,* die auf der Fläche ϱ, σ, τ liegen[1]). Sie sind nach (8) für eine *eigentliche Fläche* ϱ, σ, τ stets *getrennt,* dagegen fallen sie für einen *Sehnenkegel* λ_0, wo nach (12) $\varrho = \lambda_0^2$, $\sigma = \lambda_0$, $\tau = 1$ wird, und (28) sich auf $(\lambda - \lambda_0)^2 = 0$ reduziert, in die Tangente der Raumkurve *in der Spitze des Kegels* zusammen.

10. Fläche des Bündels durch zwei gegebene Sehnen. Nach (27) gehören die beiden Sehnen $\lambda_1\lambda_2$ und $\lambda_3\lambda_4$ einer Fläche ϱ, σ, τ des Bündels an, wenn:

$$\varrho - (\lambda_1 + \lambda_2)\sigma + \lambda_1\lambda_2\tau = 0, \quad \varrho - (\lambda_3 + \lambda_4)\sigma + \lambda_3\lambda_4\tau = 0 \tag{29}$$

oder:

$$\begin{cases} \varrho : \sigma : \tau = \lambda_1\lambda_2(\lambda_3 + \lambda_4) - \lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_4 \\ \qquad : (\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_3 + \lambda_4). \end{cases} \tag{30}$$

Durch die zwei gegebenen Sehnen $\lambda_1\lambda_2$ *und* $\lambda_3\lambda_4$ *geht eine Fläche des Bündels* (6) *mit der Gleichung:*

$$\begin{cases} \{\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 + \lambda_4) - \lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_2)\} f + (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_4) g \\ \qquad + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) h = 0. \end{cases} \tag{31}$$

11. Fläche des Bündels durch eine gegebene Treffgerade. Zwei Punkte einer Treffgeraden liegen nicht auf einer Sehne, bestimmen also nach 7 eine Fläche des Bündels. Da aber die Treffgerade schon einen Punkt der Kurve enthält, liegt sie ganz auf der Fläche.

I. *Es gibt also eine bestimmte Fläche* (6), *welche eine gegebene Treffgerade enthält.*

---

1) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 280.

Eine durch den Punkt λ_0 der Raumkurve gehende Treffgerade hat nach § 27, (13); (17) die Gleichungen ($\varrho\tau - \sigma^2 \neq 0$):

$$(32) \qquad y_1 - \lambda_0 y_2 : y_2 - \lambda_0 y_3 : y_3 - \lambda_0 y_4 = \varrho : \sigma : \tau$$

mit bestimmten Werten von $\varrho : \sigma : \tau$. Da nun nach (19) identisch in y_1, y_2, y_3, y_4 und λ_0:

$$(33) \qquad (y_1 - \lambda_0 y_2)f + (y_2 - \lambda_0 y_3)g + (y_3 - \lambda_0 y_4)h = 0,$$

so ist für alle Punkte der Treffgeraden (32):

$$(34) \qquad \varrho f + \sigma g + \tau h = 0.$$

Die Treffgerade liegt also auf der den gegebenen Werten $\varrho : \sigma : \tau$ entsprechenden, eigentlichen ($\varrho\tau - \sigma^2 \neq 0$) Fläche (6).

II. *Die durch die gegebene Treffgerade* (32) *bestimmte eigentliche Fläche* (6) *entspricht den durch* (32) *gegebenen Werten von* $\varrho : \sigma : \tau$.

Da die Linie (32) unabhängig von λ_0 auf der Fläche (34) liegt, so folgt umgekehrt:

III. *Auf jeder gegebenen eigentlichen Fläche* ϱ, σ, τ *des Bündels* (6) *liegen unendlich viele Trefflinien, die den Gleichungen* (32) *mit veränderlichem* λ_0 *entsprechen.*

12. Die beiden Scharen von Erzeugenden auf einer Fläche des Bündels. Um die nach **9** auf der Fläche ϱ, σ, τ liegenden Sehnen (27) in der Form (20) darzustellen, kann man, falls $\sigma \neq 0$, die Gleichung (27) nach $(\lambda_1 + \lambda_2)$ auflösen und erhält mit Einführung eines Parameters $\mu = \lambda_1 \lambda_2$:

$$\sigma \neq 0 : \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\varrho + \mu\tau}{\sigma}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \mu.$$

Ist dagegen $\sigma = 0$, so ist $\lambda_1 \lambda_2$ nach (27) konstant und $\mu = \tau(\lambda_1 + \lambda_2)$ veränderlich:

$$\sigma = 0 : \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\mu}{\tau}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{\varrho}{\tau}.$$

I. *Die auf der Fläche* ϱ, σ, τ *liegenden Sehnen sind mit einem laufenden Parameter* μ, *je nachdem* $\sigma \neq 0$ oder $\sigma = 0$, *durch das eine oder andere der Gleichungenpaare dargestellt:*

$$(35) \begin{cases} \sigma y_1 - (\varrho + \mu\tau) y_2 + \sigma\mu y_3 = 0, \\ \sigma y_2 - (\varrho + \mu\tau) y_3 + \sigma\mu y_4 = 0; \end{cases} \qquad (35') \begin{cases} \tau y_1 - \mu y_2 - \varrho y_3 = 0, \\ \tau y_2 - \mu y_3 - \varrho y_4 = 0. \end{cases}$$

Entsprechend folgt aus (32) mit Rücksicht auf **12**:

II. *Die auf der Fläche* ϱ, σ, τ *liegenden Treffgeraden sind mit einem laufenden Parameter* λ_0, *je nachdem* $\sigma \neq 0$ *oder* $\sigma = 0$, *durch das eine oder andere der Gleichungenpaare dargestellt:*

$$(36)\ \begin{cases}\sigma(y_1-\lambda_0 y_2)-\varrho(y_2-\lambda_0 y_3)=0,\\ \tau(y_2-\lambda_0 y_3)-\sigma(y_3-\lambda_0 y_4)=0;\end{cases}\quad (36')\begin{cases}\tau(y_1-\lambda_0 y_2)-\varrho(y_3-\lambda_0 y_4)=0,\\ y_2-\lambda_0 y_3=0.\end{cases}$$

Ganz unabhängig hiervon, kann man nun die Fläche (4), je nachdem $\sigma \neq 0$ oder $\sigma = 0$, in der einen oder andern der Formen darstellen:

$$(37)\qquad (\tau y_2-\sigma y_3)(\sigma y_2-\varrho y_3)-(\sigma y_1-\varrho y_2)(\tau y_3-\sigma y_4)=0,$$

$$(37')\qquad y_2(\tau y_2-\varrho y_4)-(\tau y_1-\varrho y_3)y_3=0.$$

Die beiden Scharen der Erzeugenden der Flächen (37) sind dann mit zwei Parametern μ und λ_0 (II § 159, (15), (15')):

$$(38)\ \begin{cases}(\sigma y_1-\varrho y_2)-\mu(\tau y_2-\sigma y_3)=0,\\ (\sigma y_2-\varrho y_3)-\mu(\tau y_3-\sigma y_4)=0;\end{cases}\quad (39)\begin{cases}(\sigma y_1-\varrho y_2)-\lambda_0(\sigma y_2-\varrho y_3)=0,\\ (\tau y_2-\sigma y_3)-\lambda_0(\tau y_3-\sigma y_4)=0;\end{cases}$$

und der Fläche (37') ebenso:

$$(38')\begin{cases}(\tau y_1-\varrho y_3)-\mu y_2=0,\\ (\tau y_2-\varrho y_4)-\mu y_3=0;\end{cases}\quad (39')\begin{cases}(\tau y_1-\varrho y_3)-\lambda_0(\tau y_2-\varrho y_4)=0,\\ y_2-\lambda_0 y_3=0.\end{cases}$$

Die Übereinstimmung von (38) und (35), (39) mit (36), (38') mit (35'), (39') mit (36') zeigt:

III. *Auf jeder eigentlichen Fläche ϱ, σ, τ des Bündels* (6) *besteht die eine Schar der Erzeugenden aus Sehnen, die andere aus Treffgeraden der Raumkurve 3. O.*[1])

Für eine uneigentliche Fläche ϱ, σ, τ, also einen Sehnenkegel, fallen in Folge von (11), (12) die Scharen (39) und (39') der Treffgeraden in die (38) und (38') der Sehnen hinein (§ 27, 7, II).

13. Bestimmung eines Hyperboloides durch eine Involution von Kurvenpunkten. Die Endpunkte λ_1, λ_2 der auf einer Fläche ϱ, σ, τ des Bündels (6) liegenden Sehnen, bilden (§ 30, (4)) die Involution (27). Sei umgekehrt durch (27) mit gegebenen Werten von ϱ, σ, τ eine Involution von Punkten der Kurve gegeben. In den Gleichungen (20) der Sehne, welche zwei entsprechende Punkte λ_1, λ_2 der Involution verbinden, sind dann die Größen $\lambda_1+\lambda_2$ und $\lambda_1\lambda_2$ durch die Gleichungen (27) verbunden. Durch Elimination beider Größen aus (27) und (20) folgt aber:

$$(40)\qquad \begin{vmatrix}\varrho & \sigma & \tau\\ y_1 & y_2 & y_3\\ y_2 & y_3 & y_4\end{vmatrix}=\varrho f+\sigma g+\tau h=0.$$

1) G. Salmon, Camb. Dubl. math. J. 5 (1850), S. 38.

Die Sehnen, welche die Punktpaare einer gegebenen Involution (27) *auf der Kurve verbinden, liegen auf der Fläche* (40), *bilden deren eine Regelschar.*[1])

14. Ebenenbüschel durch eine Treffgerade. Das Bündel aller durch den Punkt λ_0 der Raumkurve gehenden Treffgeraden ist durch die Gleichungen (32) dargestellt; das Bündel aller durch λ_0 gehenden Ebenen ebenso durch:

(41) $$r(y_1 - \lambda_0 y_2) + s(y_2 - \lambda_0 y_3) + t(y_3 - \lambda_0 y_4) = 0$$

mit beliebigen Werten der Parameter $r:s:t$. Die Ebene (41) schneidet die Kurve außer in λ_0 noch in zwei Punkten λ_1, λ_2, für die nach § 24, (22):

(42) $$r\lambda^2 + s\lambda + t = 0$$

und daher:

(43) $$1 : -(\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1\lambda_2 = r : s : t.$$

Geht daher die Ebene (41) durch eine feste Treffgerade λ_0, ϱ, σ, τ in (32), sodaß:

(44) $$r\varrho + s\sigma + t\tau = 0,$$

so folgt mit Substitution von (43) in (44) wieder wie in (27):

(45) $$\varrho - (\lambda_1 + \lambda_2)\sigma + \lambda_1\lambda_2\tau = 0.$$

Die durch eine feste Treffgerade ϱ, σ, τ *im Punkte* λ_0 *der Kurve gehenden Ebenen schneiden die Kurve, außer in* λ_0, *in Punktepaaren* λ_1, λ_2 *einer Involution* (45).[2])

Die Sehnen $\lambda_1\lambda_2$ *bilden* nach **13** *die eine Schar der Erzeugenden der Fläche* ϱ, σ, τ *des Bündels* (6).

15. Duale Übertragung. Indem man in den vorstehenden Betrachtungen mit Rücksicht auf § 29, (3'); (4) überall: y_1, y_2, y_3, y_4; f, g, h durch: $-3v_4$, v_3, $-v_2$, $3v_1$; F, G, H ersetzt, erhält man die dualen auf die *Scharschar* (6') bezüglichen Sätze.

§ 32. Konjugierte Punkte und Ebenen im Bündel und bei der Raumkurve 3. Ordnung.

1. Polarebenen eines Punktes in bezug auf die Flächen des Bündels.

Die Polarebenen eines Punktes $P_1 = y_k^{(1)}$ in bezug auf die drei Flächen 2. O.:

Die Pole einer Ebene $\Pi_1 = v_k^{(1}$ in bezug auf die drei Flächen 2. Kl.

1) Chasles, J. de math. (2) 2 (1857), S. 401 (Nr. 21).

2) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 281.

$$(1)\begin{cases} f = y_2 y_4 - y_3^2 = 0, \\ g = y_2 y_3 - y_1 y_4 = 0, \\ h = y_1 y_3 - y_2^2 = 0 \end{cases}$$

haben die Gleichungen:

$$(2)\begin{cases} u = y_4^{(1)} y_2 - 2 y_3^{(1)} y_3 + y_2^{(1)} y_4 = 0, \\ v = - y_4^{(1)} y_1 + y_3^{(1)} y_2 + y_2^{(1)} y_3 \\ \quad - y_1^{(1)} y_4 = 0, \\ w = y_3^{(1)} y_1 - 2 y_2^{(1)} y_2 + y_1^{(1)} y_3 = 0; \end{cases}$$

Die Polarebenen des Punktes P_1 in bezug auf die Flächen des Bündels § 31, (6):

$$(3) \qquad \varrho f + \sigma g + \tau h = 0$$

bilden alsdann das Ebenenbündel:

$$(4) \qquad \varrho u + \sigma v + \tau w = 0;$$

$$(1')\begin{cases} F = 3 v_1 v_3 - v_2^2 = 0, \\ G = 9 v_1 v_4 - v_2 v_3 = 0, \\ H = 3 v_2 v_4 - v_3^2 = 0 \end{cases}$$

$$(2')\begin{cases} U = 3 v_3^{(1)} v_1 - 2 v_2^{(1)} v_2 + 3 v_1^{(1)} v_3 = 0, \\ V = 9 v_4^{(1)} v_1 - v_3^{(1)} v_2 - v_2^{(1)} v_3 \\ \quad + 9 v_1^{(1)} v_4 = 0, \\ W = 3 v_4^{(1)} v_2 - 2 v_3^{(1)} v_3 + 3 v_2^{(1)} v_4 = 0. \end{cases}$$

Die Pole der Ebene Π_1 in bezug auf die Flächen der Scharschar § 31, (6'):

$$(3) \qquad \varrho F + \sigma G + \tau H = 0$$

bilden alsdann das ebene Punktfeld:

$$(4') \qquad \varrho U + \sigma V + \tau W = 0.$$

Eine Ausnahme bilden solche Punkte P_1, für welche die drei Ebenen (2) mehr als einen Punkt gemein haben (s. unter **6**).

2. Begriff konjugierter Punkte bei der Raumkurve.

Ist P_2 der Schnittpunkt der drei Ebenen (2), so gehen (II § 68, **13**) die Polarebenen des Punktes P_2 in bezug auf die Flächen des Bündels wiederum durch P_1.

Ist Π_2 die Verbindungsebene der drei Punkte (2'), so liegen die Pole der Ebene Π_2 in bezug auf die Flächen der Scharschar wiederum auf Π_1.

Die Beziehung der beiden Punkte P_1 und P_2 oder Ebenen Π_1 und Π_2 ist reziprok. Die Punkte P_1 und P_2 sind *harmonische Pole* oder *konjugierte Punkte in bezug auf alle Flächen des Bündels* (3), die Ebenen Π_1 und Π_2 *harmonische Polarebenen* oder *konjugierte Ebenen in bezug auf alle Flächen der Scharschar* (3'). Wir nennen sie (in anderer Bedeutung als § 29, **10**) *konjugierte Punkte* und *Ebenen in bezug auf die Kurve 3. O.*[1])

Zwischen den Koordinaten zweier konjugierter Punkte P_1 und P_2 oder Ebenen Π_1 und Π_2 bestehen die Beziehungen:

$$(5)\begin{cases} y_4^{(1)} y_2^{(2)} - 2 y_3^{(1)} y_3^{(2)} + y_2^{(1)} y_4^{(2)} = 0, \\ - y_4^{(1)} y_1^{(2)} + y_3^{(1)} y_2^{(2)} + y_2^{(1)} y_3^{(2)} \\ - y_1^{(1)} y_4^{(2)} = 0, \\ y_3^{(1)} y_1^{(2)} - 2 y_2^{(1)} y_2^{(2)} + y_1^{(1)} y_3^{(2)} = 0; \end{cases}$$

$$(5')\begin{cases} 3 v_3^{(1)} v_1^{(2)} - 2 v_2^{(1)} v_2^{(2)} + 3 v_1^{(1)} v_3^{(2)} = 0, \\ - 9 v_4^{(1)} v_1^{(2)} + v_3^{(1)} v_2^{(2)} + v_2^{(1)} v_3^{(2)} \\ - 9 v_1^{(1)} v_4^{(2)} = 0, \\ 3 v_4^{(1)} v_2^{(2)} - 2 v_3^{(1)} v_3^{(2)} + 3 v_2^{(1)} v_4^{(2)} = 0, \end{cases}$$

die in den beiderseitigen Koordinaten symmetrisch und linear sind.

1) v. Staudt, Beitr. (1860), S. 321; Cremona, Nouv. Ann. (2) 1 (1862), S. 293; Th. Reye, Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), S 526.

3. Die Verbindungslinie zweier konjugierter Punkte als Sehne. Multipliziert man die Gleichungen (5) mit $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$, $y_3^{(1)}$ oder $y_2^{(1)}$, $y_3^{(1)}$, $y_4^{(1)}$ und addiert, so folgt:

$$f^{(1)}y_1^{(2)} + g^{(1)}y_2^{(2)} + h^{(1)}y_3^{(2)} = 0, \quad f^{(1)}y_2^{(2)} + g^{(1)}y_3^{(2)} + h^{(1)}y_4^{(2)} = 0,$$

wenn der obere Index die Substitution der Koordinaten $y_k^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$ in die Ausdrücke (1) bedeutet; und daraus, sowie entsprechend (§ 29, (3′)) aus (5′):

(6) $f^{(1)} : g^{(1)} : h^{(1)} = f^{(2)} : g^{(2)} : h^{(2)}$ | (6′) $F^{(1)} : G^{(1)} : H^{(1)} = F^{(2)} : G^{(2)} : H^{(2)}$.

Die Gleichungen (6) bedeuten aber nach § 31, (18), daß $y_k^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$ auf derselben Sehne liegen, also (§ 26, **1**, I):

Zwei konjugierte Punkte der Raumkurve liegen stets auf derselben, durch einen von ihnen bestimmten Sehne.[1])

Zwei konjugierte Ebenen der Raumkurve gehen stets durch dieselbe, durch eine von ihnen bestimmte Achse.

4. Involution konjugierter Punkte auf einer Sehne. Sind umgekehrt zwei Punkte $y_k^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$ einer Sehne $\lambda_1\lambda_2$ zu den beiden Schnittpunkten λ_1 und λ_2 der Sehne mit der Raumkurve harmonisch, so sind sie, da λ_1 und λ_2 auf allen Flächen des Bündels (3) liegen, auch harmonische Pole aller Flächen des Bündels, also konjugiert bezüglich der Raumkurve.

Jede Sehne $\lambda_1\lambda_2$ enthält eine Involution konjugierter Punkte in bezug auf die Raumkurve; die Kurvenpunkte λ_1 und λ_2 sind die Doppelpunkte der Involution.[1])

Jede Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$ enthält eine Involution konjugierter Ebenen in bezug auf die Raumkurve; die Schmiegungsebenen λ_1 und λ_2 sind die Doppelebenen der Involution.

5. Der Konjugierte eines gegebenen Punktes. Die Auflösung der in $y_1^{(2)}$, $y_2^{(2)}$, $y_3^{(2)}$, $y_4^{(2)}$ linearen homogenen Gleichungen (5) gibt, wenn kurz y_k und y_k' für $y_k^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$ geschrieben wird:

Der konjugierte Punkt y_k' eines gegebenen Punktes y_k ist:

$$(7) \quad \begin{cases} y_1' = -y_1^2y_4 + 3y_1y_2y_3 - 2y_2^3 = gy_1 + 2hy_2, \\ y_2' = -y_1y_2y_4 + 2y_1y_3^2 - y_2^2y_3 = -fy_1 + hy_3, \\ y_3' = y_1y_3y_4 - 2y_2^2y_4 + y_2y_3^2 = -fy_2 + hy_4, \\ y_4' = y_1y_4^2 - 3y_2y_3y_4 + 2y_3^3 = -2fy_3 - gy_4; \end{cases}$$

die konjugierte Ebene v_k' einer gegebenen Ebene v_k ist:[2])

---

1) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 23; 24; Reye, Geom. d. Lage 2 (1892), S. 218.

2) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 22.

$$(7')\quad \begin{cases} 3v_1' = -27v_1^2v_4 + 9v_1v_2v_3 - 2v_2^3 = -3G_1v_1 + 2Fv_2, \\ v_2' = -9v_1v_2v_4 + 6v_1v_3^2 - v_2^2v_3 = -3Hv_1 + Fv_3, \\ v_3' = 9v_1v_3v_4 - 6v_2^2v_4 + v_2v_3^2 = -Hv_2 + 3Fv_4, \\ 3v_4' = 27v_1v_4^2 - 9v_2v_3v_4 + 2v_3^3 = -2Hv_3 + 3Gv_4. \end{cases}$$

Danach gehört im allgemeinen zu jedem Punkt y_k ein bestimmter konjugierter y_k' und zu jeder Ebene v_k eine bestimmte konjugierte v_k'.

6. Punkte mit mehr konjugierten Punkten. Der konjugierte Punkt $y_k^{(2)}$ eines gegebenen Punktes $y_k^{(1)}$ ist als Schnittpunkt der drei Ebenen (2) definiert. Die Werte von y_k' in (7) sind die vier Unterdeterminanten 3. Grades der Matrix der Koeffizienten in (2), nur daß die Bezeichnung $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ durch y_k, y_k' ersetzt ist. Die drei Ebenen (2) haben immer dann und nur dann mehr als einen Punkt gemein, wenn diese vier Unterdeterminanten verschwinden (I § 51, (9)), also nach (7):

$$(8)\quad gy_1 + 2hy_2 = 0, \qquad (9)\quad fy_1 - hy_3 = 0,$$

$$(10)\quad fy_2 - hy_4 = 0, \qquad (11)\quad 2fy_3 + gy_4 = 0.$$

Setzt man nun zuerst die Determinante der in f und h linearen homogenen Gleichungen (9) und (10):

$$(12)\qquad g = y_2y_3 - y_1y_4 \neq 0$$

voraus, so folgt aus (9) und (10): $f = 0$, $h = 0$, und damit aus (8) und (11) mit Rücksicht auf (12): $y_1 = 0$, $y_4 = 0$. Dies reduziert aber nach (1) die Gleichungen $f = 0$, $h = 0$ auf $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. Alle vier Koordinaten y_k können aber nicht verschwinden, sodaß (12) unmöglich ist. Es bleibt daher nur die Annahme:

$$(13)\qquad g = 0,$$

womit aus (8) und (11):

$$(14)\qquad hy_2 = 0, \quad fy_3 = 0.$$

Ist nun $y_2 \neq 0$ und $y_3 \neq 0$, so ist $f = 0$, $h = 0$. Ist $y_2 = 0$, $y_3 \neq 0$ oder $y_2 \neq 0$, $y_3 = 0$, so folgt aus (14) bezüglich $f = -y_3^2 = 0$ oder $h = -y_2^2 = 0$, was jedesmal der Voraussetzung widerspricht. Sind endlich y_2 und y_3 *beide* 0, so sind nach (1) auch f und h beide 0, neben (13). Also folgt (§ 24, (33)):

I. *Die einzigen Punkte unbestimmten konjugierten Punktes sind die Punkte der Kurve selbst.*

Die einzigen Ebenen unbestimmter konjugierten Ebene sind die Schmiegungsebenen der Kurve.

Ist aber $y_1^{(1)}$ ein Punkt λ der Kurve also:

$$y_k^{(1)} = \lambda^3, \quad y_2^{(1)} = \lambda^2, \quad y_3^{(1)} = \lambda, \quad y_4^{(1)} = 1,$$

so werden die drei Ebenen (2):

(15) $y_2 - 2\lambda y_3 + \lambda^2 y_4 = 0,\ y_1 - \lambda y_2 - \lambda^2 y_3 + \lambda^3 y_4 = 0,\ y_1 - 2\lambda y_2 + \lambda^2 y_3 = 0,$

gehen also alle drei durch die Tangente in λ (§ 25, (2)).

II. *Die Polarebenen eines Punktes λ der Kurve selbst in bezug auf die Flächen des Bündels* (3) *gehen alle durch die Tangente im Punkte λ.*

Die Pole einer Schmiegungsebene λ selbst in bezug auf die Flächen der Scharschar (3′) *liegen alle auf der Tangente in der Ebene λ.*

III. Zu einem Punkte λ der Kurve sind daher alle Punkte der Tangente λ und umgekehrt, zu jedem Punkte der Tangente λ ist immer der Punkt λ der Kurve konjugiert; dieser ist auch zu sich selbst konjugiert. Zu einer Schmiegungsebene λ sind alle Tangentialebenen λ und umgekehrt, zu jeder Tangentialebene λ ist immer die Schmiegungsebene λ konjugiert; diese ist auch zu sich selbst konjugiert.[1])

7. Gleichungen der Verbindungssehne zweier konjugierter Punkte in Ebenenkoordinaten.

Die Verbindungslinie des Punktes y_k mit seinem konjugierten Punkt ist nach 3 die durch ihn gehende Sehne $\lambda_1\lambda_2$, für die nach § 26, (2):

(16) $1 : -(\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1\lambda_2 = f : g : h.$

Dann sind nach § 26, (6) ihre Achsenkoordinaten:

$$(17)\ \begin{cases} s_1 = g^2 - fh, & s_2 = -fg, & s_3 = f^2, \\ s_4 = fh, & s_5 = gh, & s_6 = h^2; \end{cases}$$

Die Schnittlinie der Ebene v_k mit ihrer konjugierten Ebene ist nach 3 die in ihr liegende Achse $\lambda_1 \times \lambda_2$, für die nach § 26, (2′):

(16′) $1 : -(\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1\lambda_2 = F : G : H.$

Dann sind nach § 26, (6′) ihre Strahlenkoordinaten:

$$(17')\ \begin{cases} r_1 = \tfrac{1}{3}(G^2 - FH), \quad r_2 = GH, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad r_3 = H^2, \\ r_4 = 3FH, \ r_5 = -FG, \ r_6 = F^2. \end{cases}$$

In laufenden Ebenenkoordinaten wird eine gerade Linie durch die Gleichungen zweier ihrer Punkte, im vorliegenden Falle des Punktes y_k und eines der Schnittpunkte mit den vier Koordinatenebenen dargestellt (I § 59, 4):

Die Verbindungslinie des Punktes y_k mit seinem konjugierten Punkt ist in laufenden Ebenenkoordinaten durch zwei der folgenden Gleichungen dargestellt:

Die Schnittlinie der Ebene v_k mit ihrer konjugierten Ebene ist in laufenden Punktkoordinaten durch zwei der folgenden Gleichungen dargestellt:

---

1) Reye, Geom. d. Lage 2 (1892), S. 219.

$$(18)\begin{cases} y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3+y_4v_4=0 \\ h^2v_2-ghv_3+(g^2-fh)v_4=0, \\ fhv_3-h^2v_1-fgv_4=0, \\ ghv_1-fhv_2+f^2v_4=0, \\ (g^2-fh)v_1-fgv_2+f^2v_3=0; \end{cases}$$

$$(18')\begin{cases} v_1y_1+v_2y_2+v_3y_3+v_4y_4=0, \\ F^2y_2+FGy_3+\tfrac{1}{3}(G^2-FH)y_4=0, \\ 3FHy_3-F^2y_1+GHy_4=0, \\ -FGy_1-3FHy_2+H^2y_4=0, \\ \tfrac{1}{3}(G^2-FH)y_1+GHy_2+H^2y_3=0. \end{cases}$$

8. Polarbeziehung konjugierter Punkt- und Ebenenpaare. Bei der Polarverwandtschaft in § 29, **2** in bezug auf die Raumkurve, bezüglich den linearen Komplex in § 29, **14**, entsprachen sich Punkt und Ebene des Raumes als *Pol- und Polarebene*, bei der hier betrachteten Verwandtschaft in bezug auf die Raumkurve, bezüglich das Flächenbündel und die Flächenscharschar § 31, **2**, entsprechen sich Punkt und Punkt, Ebene und Ebene des Raumes als *konjugiert*.

Seien nun y_k und y_k' *konjugierte Punkte*, untereinander verbunden durch die Gleichungen (7), und v_k und v_k' ihre *Polarebenen*, mit ihnen verbunden durch die Gleichungen § 29, (3), (3′):

$$(19)\qquad 3v_1'=y_4',\quad v_2'=-y_3',\quad v_3'=y_2',\quad 3v_4'=-y_1';$$

$$(20)\qquad y_1=-3v_4,\quad y_2=v_3,\quad y_3=-v_2,\quad y_4=3v_1$$

und nach § 29, (4):

$$(21)\qquad f=F,\quad g=G,\quad h=H.$$

Dann ist nach (19) und (7):

$$3v_1'=-2fy_3-gy_4,\quad v_2'=fy_2-hy_4,\quad v_3'=-fy_1+hy_3,\quad 3v_4'=-gy_1-2hy_2,$$

und dann nach (20) und (21):

$$3v_1'=2Fv_2-3Gv_1,\quad v_2'=Fv_3-3Hv_1,\quad v_3'=3Fv_4-Hv_2,$$
$$3v_4'=3Gv_4-2Hv_3,$$

und daher nach (7′) v_k' und v_k *konjugierte Ebenen.*

I. *Die Polarebenen Π und Π' zweier konjugierter Punkte P und P' sind konjugierte Ebenen.*[1])

I′. *Die Pole P und P' zweier konjugierter Ebenen Π und Π' sind konjugierte Punkte.*

Nach **3** ist die Gerade PP' die durch P gehende Sehne und die Gerade $\Pi \times \Pi'$ die in Π liegende Achse. Da nun P und Π Pol und Polarebene sind, so folgt aus § 29, **7**, II:

II. *Die Sehne s zweier konjugierter Punkte P und P' und die Achse a ihrer Polarebenen Π und Π' sind zusammengehörig;*[2]) *die Endpunkte*

1) v. Staudt, Beiträge, S. 322.

2) Cremona, Ann. di mat. (1) 2 (1859) S. 23.

λ_1 und λ_2 der Sehne s sind die Schmiegungspunkte der durch die Achse a gehenden Schmiegungsebenen λ_1 und λ_2 (Fig. 51).

Zugleich folgt mit Rücksicht auf **4** und § 29, **3**:

III. *Die Involution konjugierter Punkte P, P' auf einer Sehne s und die Involution konjugierter Ebenen Π, Π' an der zugehörigen Achse a liegen perspektiv* (Fig. 51).

Wird die Ebene Π (Fig. 51) zu der Sehne s parallel, so halbiert die konjugierte Ebene Π' die Sehne $\lambda_1\lambda_2$.[1])

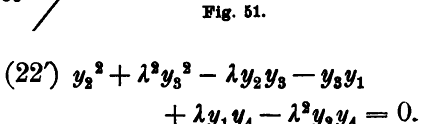


Fig. 51.

9. Pol einer Ebene in bezug auf einen Achsenkegelschnitt. Die Gleichung des Achsenkegelschnittes in der Schmiegungsebene λ und des Sehnenkegels im Punkte λ lautet nach § 26, (19') und (19):

$$(22)\quad \lambda^2 v_2^2 + v_3^2 + \lambda v_2 v_3 - 3\lambda^2 v_3 v_1 - 9\lambda v_1 v_4 - 3 v_2 v_4 = 0.$$

Der Pol einer Ebene v_k des Raumes in bezug auf den Achsenkegelschnitt (22) *hat die Koordinaten* (II § 149, (3')):

$$(23)\quad \begin{cases} \varrho y_1 = -3\lambda^2 v_3 - 9\lambda v_4, \\ \varrho y_2 = 2\lambda^2 v_2 + \lambda v_3 - 3 v_4, \\ \varrho y_3 = -3\lambda^2 v_1 + \lambda v_2 + 2 v_3, \\ \varrho y_4 = -9\lambda v_1 - 3 v_2. \end{cases}$$

Er liegt in der Ebene:

$$(24)\quad v_1^0 : v_2^0 : v_3^0 : v_4^0 = 1 : -3\lambda : 3\lambda^2 : -\lambda^3$$

des Achsenkegelschnittes λ selbst, wie denn mit (23) und (24) identisch in λ:

$$(25)\quad v_1^0 y_1 + v_2^0 y_2 + v_3^0 y_3 + v_4^0 y_4 = 0.$$

$$(22')\quad y_2^2 + \lambda^2 y_3^2 - \lambda y_2 y_3 - y_3 y_1 + \lambda y_1 y_4 - \lambda^2 y_2 y_4 = 0.$$

Die Polarebene eines Punktes y_k im Raume in bezug auf den Sehnenkegel (22') *hat die Koordinaten* (II § 149, (3)):

$$(23')\quad \begin{cases} \varrho v_1 = -y_3 + \lambda y_4, \\ \varrho v_2 = 2 y_2 - \lambda y_3 - \lambda^2 y_4, \\ \varrho v_3 = -y_1 - \lambda y_2 + 2\lambda^2 y_3, \\ \varrho v_4 = \lambda y_1 - \lambda^2 y_2. \end{cases}$$

Sie geht durch die Spitze:

$$(24')\quad y_1^0 : y_2^0 : y_3^0 : y_4^0 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1$$

des Sehnenkegels λ selbst, wie denn mit (23') und (24') identisch in λ:

$$(25')\quad y_1^0 v_1 + y_2^0 v_2 + y_3^0 v_3 + y_4^0 v_4 = 0.$$

10. Ort der Pole einer Ebene in bezug auf den laufenden Achsenkegelschnitt. Da die rechten Seiten von (23), (23') in λ quadratisch sind, so folgt:

---

1) Cremona, Ann. di mat. (1) 2 (1859), S. 24.

Der Ort der Pole einer beliebigen festen Ebene v_k in bezug auf den laufenden Achsenkegelschnitt λ ist wieder ein Kegelschnitt,[1] *der „Polkegelschnitt der Ebene v_k".*

Die Polarebene eines beliebigen festen Punktes y_k in bezug auf den laufenden Sehnenkegel λ umhüllen wieder einen Kegel 2. Kl.[1]*), den „Polarebenenkegel der Punktes y_k".*

Die Gleichungen (23) und (23') enthalten die Parameterdarstellung der Punkte des Polkegelschnittes der Ebene v_k, bezüglich der Tangentialebenen des Polarebenenkegels des Punktes y_k in laufendem Parameter λ.

11. Die Ebene des Polkegelschnittes. Durch Elimination von ϱ, λ^2, λ, 1 aus den vier Gleichungen (23) und (23') ergibt sich:

Die Ebene des Polkegelschnittes der Ebene v_k hat die Gleichung:

$$(26)\quad \begin{vmatrix} \frac{y_1}{3} & -v_3 & -3v_4 & 0 \\ y_2 & 2v_2 & v_3 & -3v_4 \\ y_3 & -3v_1 & v_2 & 2v_3 \\ \frac{y_4}{3} & 0 & -3v_1 & -v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die vier Unterdeterminanten der 1. Kolonne, die erste und vierte noch durch 3 geteilt, sind die Koordinaten v_k' der Ebene (26). Sie haben aber die Werte (7'), also:

Zu jeder Ebene v_k ist die Ebene v_k' ihres Polkegelschnittes die konjugierte Ebene.[2]

Die Spitze des Polarebenenkegels des Punktes y_k hat die Gleichung:

$$(26')\quad \begin{vmatrix} v_1 & -y_3 & -y_4 & 0 \\ v_2 & 2y_2 & y_3 & -y_4 \\ v_3 & -y_1 & y_2 & 2y_3 \\ v_4 & 0 & -y_1 & -y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die vier Unterdeterminanten der 1. Kolonne sind die Koordinaten y_k' des Punktes (26'). Sie haben aber die Werte (7), also (wie allgemeiner schon unter **1**; **2**):

Zu jedem Punkte y_k ist die Spitze y_k' seines Polarebenenkegelschnittes der konjugierte Punkt.

Die Beziehung beider Ebenen oder Punkte ist daher auch reziprok.

§ 33. Die Schnittpunkte zweier konjugierter Ebenen mit der Kurve.

1. Fragestellung. Durch einen Punkt y_k gehen drei Schmiegungsebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, durch den konjugierten Punkt y_k' drei Schmiegungsebenen $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$. Eine Ebene v_k schneidet die Kurve in drei Punkten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die konjugierte Ebene v_k' in drei Punkten $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$. Zwischen y_k und y_k', v_k und v_k' bestehen die Beziehungen § 32, (7); (7'). Es

1) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 288; Schröter, Oberfl. (1880), S. 319.

2) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 288.

handelt sich nunmehr um die Auffindung *direkter Beziehungen zwischen den Parametern* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *und* $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$, die ebenso, wie jene, reziprok sein müssen.

2. Die einfachsten symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer kubischen Gleichung. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0, \tag{1}$$

so ist:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -p, \quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = q, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -r, \tag{2}$$

und ferner:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = p^2 - 2q, \quad \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 = q^2 - 2pr, \\ \qquad\qquad \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = -p^3 + 3pq - 3r, \\ \lambda_2\lambda_3(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_3\lambda_1(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) = 3r - pq, \\ \lambda_1^3(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2^3(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3^3(\lambda_1 + \lambda_2) = p^2q - 2q^2 - pr. \end{cases} \tag{3}$$

3. Kubische Gleichung der drei Werte einer unsymmetrischen Funktion. Wir bilden nun diejenige kubische Gleichung:

$$\lambda^3 + p'\lambda^2 + q'\lambda + r' = 0, \tag{4}$$

deren Wurzeln die drei Werte:

$$\lambda_1' = \frac{q - 3\lambda_2\lambda_3}{p + 3\lambda_1}, \quad \lambda_2' = \frac{q - 3\lambda_3\lambda_1}{p + 3\lambda_2}, \quad \lambda_3' = \frac{q - 3\lambda_1\lambda_2}{p + 3\lambda_3} \tag{5}$$

einer dreiwertigen unsymmetrischen Funktion der drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 sind. Die Koeffizienten dieser Gleichung haben die Werte:

$$p' = -(\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3'), \quad q' = \lambda_2'\lambda_3' + \lambda_3'\lambda_1' + \lambda_1'\lambda_2', \quad r' = -\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'. \tag{6}$$

Für den gemeinsamen Nenner von p', q', r' nach Einsetzung der Werte (5) ergibt sich mittels (2):

$$(p + 3\lambda_1)(p + 3\lambda_2)(p + 3\lambda_3) = -(2p^3 - 9pq + 27r) = -P, \tag{7}$$

und für p', q', r' selbst mit Einsetzung der Werte (5):

$$\begin{cases} p' = \frac{1}{P}\{(q - 3\lambda_2\lambda_3)(p + 3\lambda_2)(p + 3\lambda_3) + \cdots + \cdots\}, \\ q' = -\frac{1}{P}\{(q - 3\lambda_3\lambda_1)(q - 3\lambda_1\lambda_2)(p + 3\lambda_1) + \cdots + \cdots\}, \\ r' = \frac{1}{P}(q - 3\lambda_2\lambda_3)(q - 3\lambda_3\lambda_1)(q - 3\lambda_1\lambda_2), \end{cases} \tag{8}$$

wo die durch Punkte angedeuteten Glieder durch zyklische Vertauschung von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entstehen. Die Berechnung der symmetrischen Funktionen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ geschieht dann mittels der Formeln (2) und (3), womit sich ergibt:

Die Koeffizienten der kub. Gleichung (4), *welche die drei Wurzeln* (5) *hat, sind:*

$$(9)\qquad p' = \frac{3(p^2q - 6q^2 + 9pr)}{2p^3 - 9pq + 27r}, \quad q' = -\frac{3(pq^2 - 6p^2r + 9qr)}{2p^3 - 9pq + 27r},$$

$$r' = -\frac{2q^3 - 9pqr + 27r^2}{2p^3 - 9pq + 27r}.$$[1]

Umgekehrt hat die Gleichung (4) die Wurzeln (5), wenn man den p', q', r' die Werte (9) gibt.

4. Homogene Form des Satzes. Setzt man jetzt:

$$(10)\qquad p = \frac{b}{a},\; q = \frac{c}{a},\; r = \frac{d}{a};\quad p' = \frac{b'}{a'},\; q' = \frac{c'}{a'},\; r' = \frac{d'}{a'},$$

so nimmt der Satz unter **3** die Form an:

Hat die kub. Gleichung:

$$(11)\qquad a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3, *so hat die kub. Gleichung:*

$$(12)\qquad a'\lambda^3 + b'\lambda^2 + c'\lambda + d' = 0$$

mit den Koeffizienten:

$$(13)\qquad \begin{cases} a' = 27a^2d - 9abc + 2b^3, & b' = 3(9abd - 6ac^2 + b^2c), \\ c' = -3(9acd - 6b^2d + bc^2), & d' = -(27ad^2 - 9bcd + 2c^3) \end{cases}$$

die Wurzeln λ_1', λ_2', λ_3' *in* (5).

5. Anwendung des Satzes auf konjugierte Elemente. Setzt man nun in (11) und (12):

$$(14)\qquad \begin{cases} a = y_4, & b = -3y_3, & c = 3y_2, & d = -y_1, \\ a' = y_4', & b' = -3y_3', & c' = 3y_2', & d' = -y_1'; \end{cases} \text{ oder:}$$

$$(14')\qquad \begin{cases} a = v_1, & b = v_2, & c = v_3, & d = v_4, \\ a' = v_1', & b' = v_2', & c' = v_3', & d' = v_4'; \end{cases}$$

so nehmen die Gleichungen (11) und (12) die Form an:

$$(15)\qquad \begin{cases} y_4\lambda^3 - 3y_3\lambda^2 + 3y_2\lambda - y_1 = 0, \\ y_4'\lambda^3 - 3y_3'\lambda^2 + 3y_2'\lambda - y_1' = 0; \end{cases} \text{ oder:}$$

$$(15')\qquad \begin{cases} v_1\lambda^3 + v_2\lambda^2 + v_3\lambda + v_4 = 0, \\ v_1'\lambda^3 + v_2'\lambda^2 + v_3'\lambda + v_4' = 0, \end{cases}$$

---

1) Cremona, Ann. di mat. (1), 2 (1859), S. 22.

und bestimmen nach § 24, (26') und (26) die durch die Punkte y_k und y_k' gehenden Schmiegungsebenen λ_1, λ_2, λ_3 und λ_1', λ_2', λ_3' oder die in den Ebenen v_k und v_k' liegenden Kurvenpunkte λ_1, λ_2, λ_3 und λ_1', λ_2', λ_3'. Zugleich aber gehen die Gleichungen (13) in die Gleichungen § 32, (7) oder (7') über, welche ausdrücken, daß y_k und y_k', v_k und v_k' konjugiert sind. Daher ergeben sich die beiden Sätze:

Gehen durch einen Punkt y_k die drei Schmiegungsebenen λ_1, λ_2, λ_3, so gehen durch den konjugierten Punkt y_k' die drei Schmiegungsebenen:

Liegen in einer Ebene v_k die drei Kurvenpunkte λ_1, λ_2, λ_3, so liegen in der konjugierten Ebene die drei Kurvenpunkte:

$$\lambda_1' = \frac{2\lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_1}, \quad \lambda_2' = \frac{2\lambda_3\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_1 - 2\lambda_2}, \tag{16}$$

$$\lambda_3' = \frac{2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3}.$$

Wird $\lambda_3 = \lambda_2$, so ergibt sich in Übereinstimmung mit § 32, 6, III:

$$\lambda_1' = \lambda_2' = \lambda_3' = \lambda_2, \tag{17}$$

da jeder Tangentialebene $\lambda_1\lambda_2\lambda_2$ die Schmiegungsebene $\lambda_2\lambda_2\lambda_2$ konjugiert ist.

Wird $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, so wird:

$$\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \text{ unbestimmt}, \tag{18}$$

da jeder Schmiegungsebene $\lambda_1\lambda_1\lambda_1$ jede Tangentialebene $\lambda_1\lambda_1\lambda_0$ bei unbestimmtem λ_0 konjugiert ist.

6. Bedeutung der Parameterbeziehung. Schreibt man die Gleichungen (16) in der Form:

$$\lambda_1\lambda_1' - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_1')(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3 = 0, \ldots, \ldots, \tag{19}$$

so erkennt man nach § 30, 2:

Die Punkte oder Schmiegungsebenen λ_1'; λ_2'; λ_3' sind bezüglich die vierten harmonischen Elemente zu λ_1 und λ_2, λ_3; zu λ_2 und λ_3, λ_1; zu λ_3 und λ_1, λ_2.

Gegenüber den Gleichungen § 32, (7), (7'), die sich auf das kanonische Koordinatentetraeder der Gleichungen § 24, (22) beziehen, sind die Parameterbeziehungen (16) zwischen den konjugierten Elementen von der Wahl des Koordinatentetraeders unabhängig, aber auch gegen jede lineare Transformation des Parameters invariant (I § 6, **10**).

7. Die Realitätsverhältnisse konjugierter Elemente. Je nachdem die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ alle drei reell oder einer reell und zwei konjugiert komplex sind, gilt das Entsprechende nach (16) auch für $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$.

Je nachdem daher unter den in einer Ebene liegenden Kurvenpunkten drei reelle oder ein reeller sich befinden, sind auch von den in der konjugierten Ebene enthaltenen Kurvenpunkten drei oder einer reell.

Der duale Satz bezieht sich auf die Schmiegungsebenen an zwei konjugierten Punkten.

8. Involution konjugierter Elemente. Die nicht homogenen Koeffizienten (10) erhalten durch die Annahme (14), (14′) die Werte:

$$(20)\quad p = -\frac{3y_3}{y_4},\ q = \frac{3y_2}{y_4},\ r = -\frac{y_1}{y_4};\ (20')\ p = \frac{v_2}{v_1},\ q = \frac{v_3}{v_1},\ r = \frac{v_4}{v_1}.$$

Danach wird mit Rücksicht auf § 24, (33) gleichzeitig:

$$(21)\quad \begin{cases} y_4^2(p^2-3q) = -9f, \\ y_4^2(pq-9r) = -9g, \\ y_4^2(q^2-3pr) = -9h \end{cases} \qquad (21')\begin{cases} v_1^2(p^2-3q) = -F, \\ v_1^2(pq-9r) = -G, \\ v_1^2(q^2-3pr) = -H. \end{cases}$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$(22)\qquad S = -(\lambda_1 + \lambda_1'),\qquad T = \lambda_1\lambda_1',$$

so wird nach (5) unter Benutzung der aus (2) folgenden Beziehung: $\lambda_2\lambda_3 = q + p\lambda_1 + \lambda_1^2$:

$$S = 2\frac{q+p\lambda_1}{p+3\lambda_1},\qquad T = \frac{3r+q\lambda_1}{p+3\lambda_1}.$$

Ordnet man diese Gleichungen nach λ_1:

$$(3S-2p)\lambda_1 + (pS-2q) = 0,\quad (3T-q)\lambda_1 + (pT-3r) = 0,$$

so folgt durch Elimination von λ_1:

$$(p^2-3q)T - \tfrac{1}{2}(pq-9r)S + (q^2-3pr) = 0$$

oder nach (22):

$$(p^2-3q)\lambda_1\lambda_1' + \tfrac{1}{2}(pq-9r)(\lambda_1+\lambda_1') + (q^2-3pr) = 0.$$

Da hier die Koeffizienten nach (2) in $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ symmetrisch sind, muß dieselbe Gleichung auch mit λ_2, λ_2' und λ_3, λ_3' für λ_1, λ_1' gelten:

Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ durch (16) *verknüpfte Schmiegungsebenen konjugierter Punkte y_k, y_k' oder Schnittpunkte konjugierter Ebenen v_k, v_k', so gehören die Paare λ_1, λ_1'; λ_2, λ_2'; λ_3, λ_3' der Involution an:*

$$(23)\qquad (p^2-3q)\lambda\lambda' + \tfrac{1}{2}(pq-9r)(\lambda+\lambda') + (q^2-3pr) = 0.$$

Die Gleichung (23) lautet, wenn man einen Augenblick α, β, γ für λ_1, λ_2, λ_3 schreibt, ausführlich:

$$(24)\quad \begin{aligned}&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta)\lambda\lambda'\\ &-\tfrac{1}{2}(\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha^2\beta+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2+\alpha\beta^2-6\alpha\beta\gamma)(\lambda+\lambda')\\ &+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2-(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma=0.\end{aligned}$$

Da sie jedoch nach (21) und (21′) auch in der Form geschrieben werden kann:

$$(25)\quad f\lambda\lambda'+\tfrac{1}{2}g(\lambda+\lambda')+h=0;\quad (25')\quad F\lambda\lambda'+\tfrac{1}{2}G(\lambda+\lambda')+H=0$$

so entsprechen die Doppelelemente der Involution (§ 30, (5)) den quadratischen Gleichungen:

$$(26)\quad f\lambda^2+g\lambda+h=0;\quad (26')\quad F\lambda^2+G\lambda+H=0.$$

Da dies aber nach § 26, (3); (3′) diejenigen sind, welche die Sehne des Punktes y_k oder die Achse der Ebene v_k bestimmen, so folgt mit Rücksicht auf § 32, **3**:

Die Schmiegungspunkte $\lambda_1, \lambda_1'; \lambda_2, \lambda_2'; \lambda_3, \lambda_3'$ *der sechs Schmiegungsebenen, die im Sinne von* (16) *durch zwei konjugierte Punkte* y_k *und* y_k' *gehen, gehören der Involutivn von Punkten der Raumkurve an, deren Doppelpunkte die Endpunkte der Sehne* $y_k y_k'$ *sind.*

Die Schmiegungsebenen $\lambda_1, \lambda_1'; \lambda_2, \lambda_2'; \lambda_3, \lambda_3'$ *der sechs Kurvenpunkte die im Sinne von* (16) *in zwei konjugierten Ebenen* v_k *und* v_k' *liegen, gehören der Involution von Schmiegungsebenen an, deren Doppelebenen die Schmiegungsebenen der Achse* $v_k \times v_k'$ *sind.*

9. Einführung der Ebene dreier Kurvenpunkte als Koordinatenebene. Die Gleichung der Ebene Π, welche durch drei Punkte λ_1, λ_2, λ_3 der Kurve bestimmt ist, lautet nach § 24, (28) mit der Bedeutung (2) von p, q, r:

$$(27)\quad y_1+py_2+qy_3+ry_4=0.$$

Der Pol P dieser Ebene ist nach § 29, (3′):

$$(28)\quad y_1=-3r,\ y_2=q,\ y_3=-p,\ y_4=3.$$

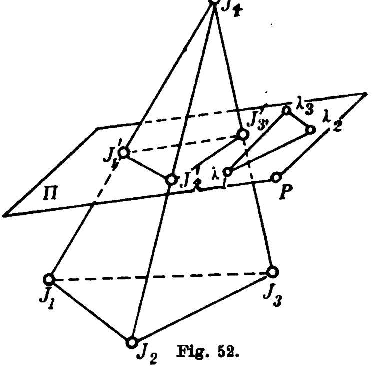


Fig. 52.

Die Schnittpunkte J_1', J_2', J_3' der Kanten J_4J_1, J_4J_2, J_4J_3 mit der Ebene Π haben die Koordinaten: $r, 0, 0, -1$; $0, r, 0, -p$; $0, 0, r, -q$. Bezeichnet man daher die Koordinaten in bezug auf das neue Koordinatentetraeder $J_1'J_2'J_3'J_4$ (Fig. 52) mit z_k, so bestehen zwischen alten und neuen Koordinaten die Gleichungen (I § 63, (25)):

(29) $y_1 = rz_1,\ y_2 = rz_2,\ y_3 = rz_3,\ y_4 = -z_1 - pz_2 - qz_3 + z_4,$

oder umgekehrt:

(30) $rz_1 = y_1,\ rz_2 = y_2,\ rz_3 = y_3,\ rz_4 = y_1 + py_2 + qy_3 + ry_4.$

Im neuen System erhält daher die Ebene Π die Gleichung:

(31) $$z = 0$$

und ihr Pol P die Koordinaten:

(32) $$z_1 = -3r,\quad z_1 = q,\quad z_3 = -p,\quad z_4 = 0.$$

10. Harmonikale im Dreieck dreier Kurvenpunkte. Die Seiten des Dreiecks $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, also die Sehnen $\lambda_2\lambda_3$, $\lambda_3\lambda_1$, $\lambda_1\lambda_2$ werden *im Raume* durch je *zwei* Gleichungen dargestellt, die Gleichung der Ebene $\Pi = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ einerseits:

(33) $$y_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)y_2 + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)y_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 y_4 = 0$$

und die Gleichung ihrer Verbindungsebenen $\lambda_2\lambda_3 0$, $\lambda_3\lambda_1 0$, $\lambda_1\lambda_2 0$ mit dem Punkte J_4 ($\lambda = 0$ in § 24, (22)):

(34) $$y_1 - (\lambda_2 + \lambda_3)y_2 + \lambda_2\lambda_3 y_3 = 0,\ y_1 - (\lambda_3 + \lambda_1)y_2 + \lambda_3\lambda_1 y_3 = 0,$$
$$y_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)y_2 + \lambda_1\lambda_2 y_3 = 0,$$

woraus sich jeweils wieder die Darstellung § 25, (1) ergibt.

In der Ebene (33) oder (27) oder (31) aber, bezogen auf das *Koordinatendreieck* $J_1'J_2'J_3'$ lauten die Gleichungen der drei Seiten des Dreiecks $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ nach (34) und (29):

(35) $$X_1 = z_1 - (\lambda_2 + \lambda_3)z_2 + \lambda_2\lambda_3 z_3 = 0,\ X_2 = z_1 - (\lambda_3 + \lambda_1)z_2 + \lambda_3\lambda_1 z_3 = 0,$$
$$X_3 = z_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)z_2 + \lambda_1\lambda_2 z_3 = 0.$$

Die Gleichung der *Harmonikale* eines Punktes z_1^0, z_2^0, z_3^0 in bezug auf das Dreieck ist (I § 26, (10)):

(36) $$\frac{X_1}{X_1^0} + \frac{X_2}{X_2^0} + \frac{X_3}{X_3^0} = 0,$$

wo X_1^0, X_2^0, X_3^0 die für den Punkt z_k^0 gebildeten Werte von X_1, X_2, X_3 sind. Für den Punkt (32) ist nun mit Rücksicht auf (2):

(37) $$X_1^0 = 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)$$
$$+ \lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)^2, \ldots, \ldots$$

Die Gleichung der Harmonikale des Punktes (32) ist daher:

$$\frac{X_1}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)^2} + \frac{X_2}{\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1)^2} + \frac{X_3}{\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)^2} = 0,$$

oder mit Rückkehr zum räumlichen Koordinatensystem:

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die Schnittpunkte einer Ebene Π mit der Raum-

kurve, so hat die Harmonikale des Poles P der Ebene, der in ihr selbst liegt, in bezug auf das Dreieck $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ die Gleichungen:[1])

$$(38)\quad \begin{cases} y_1 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y_2 + (\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)y_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 y_4 = 0, \\ \dfrac{y_1-(\lambda_2+\lambda_3)y_2+\lambda_2\lambda_3 y_3}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_3)^2} + \dfrac{y_1-(\lambda_3+\lambda_1)y_2+\lambda_3\lambda_1 y_3}{\lambda_2(\lambda_3-\lambda_1)^2} \\ \qquad + \dfrac{y_1-(\lambda_1+\lambda_2)y_2+\lambda_1\lambda_2 y_3}{\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)^2} = 0. \end{cases}$$

11. Einführung der Koeffizienten an Stelle der Wurzeln. Die erste Gleichung (38) erhält durch Einführung von p, q, r die Form (27); wir wollen auch die zweite in p, q, r darstellen. Die zweite Gleichung (38) hat die Form:

$$(39)\qquad Ay_1 - By_2 + Cy_3 = 0,$$

wo A, B, C symmetrische Funktionen von λ_1, λ_2, λ_3 sind:

$$(40)\quad \begin{cases} A = \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_1-\lambda_2)^2 + \cdots + \cdots; \\ B = \lambda_2\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_1-\lambda_2)^2 + \cdots + \cdots; \\ C = \lambda_2^2\lambda_3^2(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_1-\lambda_2)^2 + \cdots + \cdots \end{cases}$$

Nun ist zunächst:

$$(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_1-\lambda_2)^2 = 3\lambda_1^4 - 2\lambda_1^3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + 6\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 \\ - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + (\lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2),$$

und mit Rücksicht auf (2) und (3):

$$(41)\qquad (\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_1-\lambda_2)^2 = 3\lambda_1^4 + 2p\lambda_1^3 - 6r\lambda_1 + q^2 - 4pr.$$

Mit Benutzung der Formeln (2), (3) ergibt sich alsdann:

$$(42)\quad \begin{cases} A = 3r(p^3-3pq+3r) - 2pr(p^2-2q) + 18r^2 + q(q^2-4pr) \\ \quad = p^3r - 9pqr + q^3 + 27r^2, \\ B = -3r(p^2q-2q^2-pr) - 2pr(3r-pq) - 12pr^2 \\ \quad + (q^2-4pr)(3r-pq) = 3p^2qr + 9q^2r - pq^3 - 27pr^2, \\ C = 3r^2(p^2-2q) - 2p^2r^2 + 6qr^2 + (q^2-4pr)(q^2-2pr) \\ \quad = (3pr-q^2)^2. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen (38) können daher in der Form geschrieben werden:

$$(43)\quad \begin{cases} y_1 + py_2 + qy_3 + ry_4 = 0, \\ \frac{1}{3}\{(pq-9r)^2 - (p^2-3q)(q^2-3pr)\}y_1 + (pq-9r)(q^2-3pr)y_2 \\ \qquad + (3pr-q^2)^2 y_3 = 0\ ^{2)} \end{cases}$$

---

1) Cremona, Ann. di mat (1) 2 (1859), S. 21, wo $\lambda_1(\lambda_2-\lambda_3)^2$ für $\lambda_1(\lambda_2^2+\lambda_3^2)$ zu lesen ist.

2) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 23.

oder in der Bezeichnung (20′) mit Rücksicht auf (21′):

$$(44)\qquad \begin{cases} v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = 0, \\ \frac{1}{3}(G^2 - FH)y_1 + GHy_2 + H^2 y_3 = 0. \end{cases}$$

Dies sind aber nach § 32, (18′) die Gleichungen der Achse, in der die Ebene v_k von ihrer konjugierten v_k' geschnitten wird. Wegen der Reziprozität zweier konjugierter Ebenen folgt daher unter Hinzunahme des dualen Satzes:

Die Schnittachse zweier konjugierter Ebenen ist in jeder von ihnen die Harmonikale des Poles der Ebene in bezug auf das Dreieck ihrer drei Schnittpunkte mit der Kurve.[1]

Die Verbindungssehne zweier konjugierter Punkte ist an jedem von ihnen die Harmonikale der Polarebene des Punktes in bezug auf das Dreiflach der drei durch ihn gehenden Schmiegungsebenen.

§ 34. Das an eine Ebene sich anlehnende Haupttetraeder.

1. Konjugierte Ebenen durch die Schmiegungsstrahlen eines Schmiegungstetraeders. Das Schmiegungstetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$, auf das sich die Gleichungen § 28, (1) beziehen, hat nach § 28, 4 zwei Gegenkanten, die Schmiegungsstrahlen sind, die Kanten $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$. Irgendeine durch die Kante $J_3 J_1$ ($y_2 = 0$, $y_4 = 0$) gehende Ebene hat die Gleichung: $v_2 y_2 + v_4 y_4 = 0$ oder die Koordinaten: $0, v_2, 0, v_4$. Die konjugierte Ebene ist nach § 32, (7′): $v_2, 0, 9v_4, 0$ oder $v_2 y_1 + 9 v_4 y_3 = 0$, geht also durch die Kante $J_2 J_4 (y_1 = 0,\ y_3 = 0)$. Irgendeine durch die Kante $J_2 J_4$ gehende Ebene $v_1, 0, v_3, 0$ hat die konjugierte $0, 9v_1, 0, v_3$, die wiederum durch $J_3 J_1$ geht. Da $J_1 J_2 J_3 J_4$ ein beliebiges Schmiegungstetraeder ist, so gilt das entsprechende für jedes solche.

Sagen wir daher von einem *Schmiegungstetraeder* $P_1 P_2 P_3 P_4$, daß es *sich an eine Ebene anlehnt,* wenn eine der beiden Kanten $P_3 P_1$ und $P_2 P_4$, welche Schmiegungsstrahlen sind, in der Ebene liegt, so gilt der Satz:

Lehnt sich ein Schmiegungstetraeder an eine Ebene Π an, so lehnt es sich auch an die konjugierte Ebene Π' an.

2. Konjugierte Punkte auf den zwei Schmiegungsstrahlen. Da die Kante $P_3 P_1$ nach § 29, 9, II ihre eigene reziproke Polare ist, so daß der Pol jeder durch sie gehenden Ebene auf ihr selbst liegt, so folgt weiter:

---

1) Cremona, Ann. di mat. (1) 2, S. 21; Nouv. Ann. (2) 1 (1862), S. 297; H. Schröter, Oberfl. (1880), S. 288; St. Jolles, J. f. Math. 130 (1906), S. 270.

Lehnt sich ein Schmiegungstetraeder $P_1P_2P_3P_4$ an zwei konjugierte Ebenen Π und Π' an, so daß die Kanten P_3P_1 und P_2P_4 bezüglich mit Π und Π' vereinigt liegen, so liegen auch die Pole P und P' der beiden Ebenen bezüglich mit den Kanten P_3P_1 und P_2P_4 vereinigt.

Diese Pole sind nach § 32, 8, I′ wieder konjugiert.

3. Die drei Schmiegungstetraeder, die sich an eine Ebene anlehnen. Ein Schmiegungstetraeder $P_1P_2P_3P_4$ ist nach § 28, 2 durch zwei Punkte P_4 und P_1 der Kurve, seine *Hauptecken*, mit den Parametern α und β bestimmt, worauf die Ecken P_2 und P_3, die nicht auf der Kurve liegen, die Koordinaten § 28, (5) haben.

Sei nun auf das Schmiegungstetraeder $J_1J_2J_3J_4$ bezogen:

$$v_1y_1 + v_2y_2 + v_3y_3 + v_4y_4 = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer gegebenen Ebene Π, welche die Kurve in den drei Punkten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ schneidet, so daß nach § 24, (27):

$$\begin{cases} v_1 = 1, \quad v_2 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \quad v_3 = \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_2, \\ v_4 = -\beta_1\beta_2\beta_3. \end{cases} \tag{2}$$

Jeder der drei Punkte genügt der Gleichung 3. Grades § 24, (26), so daß etwa für β_1:

$$v_1\beta_1^3 + v_2\beta_1^2 + v_3\beta_1 + v_4 = 0. \tag{3}$$

Wir wählen nun β_1 als eine Hauptecke P_1 eines neuen Schmiegungstetraeders $P_1P_2P_3P_4$ und suchen die andere Hauptecke $P_4 = \alpha_1$ so zu bestimmen, daß die Ecke P_3 und daher auch die Kante P_1P_3 in der Ebene (1) liegt, also das Schmiegungstetraeder sich an die Ebene (1) anlehnt. Es muß dann nach § 28, (5) sein:

$$3v_1\alpha_1^2\beta_1 + v_2\alpha_1(\alpha_1 + 2\beta_1) + v_3(2\alpha_1 + \beta_1) + 3v_4 = 0$$

oder, wenn die mit 3 multiplizierte Gleichung (3) subtrahiert und der nicht verschwindende Faktor $\alpha_1 - \beta_1$ gestrichen wird:

$$3v_1(\alpha_1 + \beta_1)\beta_1 + v_2(\alpha_1 + 3\beta_1) + 2v_3 = 0. \tag{4}$$

Setzt man aber hier die Werte (2) ein, so ergibt sich:

$$\alpha_1(2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3) - (\beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_2 - 2\beta_2\beta_3) = 0$$

und damit:

$$\alpha_1 = \frac{\beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_2 - 2\beta_2\beta_3}{2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3}. \tag{5}$$

Ebenso hätte sich, wenn man β_2 oder β_3 als Ecke P_1 genommen hätte, für die Ecke P_4 ergeben:

$$(5) \qquad \alpha_2 = \frac{\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 - 2\beta_3\beta_1}{2\beta_2 - \beta_3 - \beta_1}, \quad \alpha_3 = \frac{\beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1 - 2\beta_1\beta_2}{2\beta_3 - \beta_1 - \beta_2}.$$

Daher folgt mit Rücksicht auf § 33, (16):

I. *Es gibt im allgemeinen drei Schmiegungstetraeder* $P_1^{(i)} P_2^{(i)} P_3^{(i)} P_4^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, *die sich an eine gegebene Ebene* Π *anlehnen. Die Punktpaare* $P_1^{(i)} = \beta_i$, $P_4^{(i)} = \alpha_i$, *welche die Hauptecken der drei Schmiegungstetraeder abgeben, bestehen je aus einem der drei Schnittpunkte* β_i *der Ebene* Π *mit der Kurve und dem jedesmal gleichnamigen der drei Schnittpunkte* α_i *der konjugierten Ebene* Π' *mit der Kurve.*

4. Die Kanten der drei Schmiegungstetraeder. Nach 2 folgt alsdann weiter:

II. *Die Kanten* $P_3^{(i)} P_1^{(i)}$ *dieser drei Schmiegungstetraeder gehen alle drei durch den Pol* P *der Ebene* Π *und die Kanten* $P_2^{(i)} P_4^{(i)}$ *alle drei durch den Pol* P' *der Ebene* Π'.

Sie sind die Verbindungslinien der drei in der Ebene Π oder Π' liegenden Kurvenpunkte mit dem Pol P oder P'. Gleichzeitig folgt aus § 28, **6**:

III. *Die Sehnen der Kurve, welche die beiden Kanten* $P_3^{(i)} P_1^{(i)}$ *und* $P_2^{(i)} P_4^{(i)}$ *schneiden, werden von diesen jedesmal* ($i = 1, 2, 3$) *harmonisch geteilt.*

Allgemein ist die Kante $P_1 P_3$ oder $P_2 P_4$ des Schmiegungstetraeders mit den Hauptecken $P_1 = \beta$ und $P_4 = \alpha$ durch die 2. und 4. oder 1. und 3. Gleichung § 28, (4) dargestellt, wofür unter Elimination von y_4 und y_1 die Gleichungenpaare:

$$(6) \qquad \begin{cases} (\alpha + \beta) y_1 - (3\alpha + \beta)\beta y_2 + 2\alpha\beta^2 y_3 = 0, \\ 2 y_2 - (\alpha + 3\beta) y_3 + (\alpha + \beta)\beta y_4 = 0; \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{cases} (\alpha + \beta) y_1 - \alpha(\alpha + 3\beta) y_2 + 2\alpha^2\beta y_3 = 0, \\ 2 y_2 - (3\alpha + \beta) y_3 + \alpha(\alpha + \beta) y_4 = 0. \end{cases}$$

eintreten können. *Sie geben mit* $\alpha, \beta = \alpha_i, \beta_i$, $i = 1, 2, 3$, *die Kanten* $P_3^{(i)} P_1^{(i)}$ *und* $P_2^{(i)} P_4^{(i)}$.

5. Besondere Lage der Ebene. Die drei Schnittpunkte $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ der gegebenen Ebene (1) mit der Kurve waren zunächst *getrennt* vorausgesetzt.

Fallen jedoch *zwei* zusammen, $\beta_3 = \beta_2$, so werden nach § 33, (17) die Werte (5) gleich: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2$. Da für ein Schmiegungstetraeder (§ 28, 2) stets $\alpha \neq \beta$ sein muß, bleibt dann von den drei Wertepaaren β_i, α_i nur das eine $\beta_1, \alpha_1 = \beta_2$ übrig. Die Ebene Π ist

die Tangentialebene $\beta_2\beta_2\beta_1 = \alpha_1\alpha_1\beta_1$ und ihre konjugierte Π' die Schmiegungsebene $\beta_2\beta_2\beta_2 = \alpha_1\alpha_1\alpha_1$ (§ 32, 6, III):

I. *An eine gegebene Tangentialebene Π, die im Punkte $\beta_2 = \alpha_1$ die Kurve berührt und sie außerdem in β_1 schneidet, lehnt sich nur ein einziges Schmiegungstetraeder $P_1P_2P_3P_4$ an mit den Hauptecken $P_1 = \beta_1$, $P_4 = \alpha_1$.*

Die Ebenen Π und Π' sind nach § 28, (3) selbst seine Ebenen $\Pi_2 = P_3P_1P_4$ und $\Pi_1 = P_2P_3P_4$, ihre Pole P und P' nach § 29, 9, I seine Ecken P_3 und P_4.

Fallen alle *drei* Punkte $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ zusammen, werden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ unbestimmt, die Ebene Π ist die Schmiegungsebene $\beta_1\beta_1\beta_1$, die konjugierte Π' kann jede Tangentialebene $\beta_1\beta_1\lambda_0$ in β_1 sein (§ 32, 6, III):

II. *An eine gegebene Schmiegungsebene Π, die im Punkte β_1 der Kurve sich anschmiegt, lehnen sich ∞^1 Schmiegungstetraeder an mit den Hauptecken $P_1 = \beta_1$ und $P_4 = \lambda_0$ mit beliebigem λ_0.*

Die Ebenen Π und Π' sind selbst seine Ebenen $\Pi_4 = P_1P_2P_3$ und $\Pi_3 = P_1P_2P_4$, ihre Pole P und P' seine Ecken P_1 und P_2.

6. Die drei an eine Ebene sich anlehnenden Koordinatentetraeder. Die drei in der gegebenen Ebene Π liegenden, reell und getrennt angenommenen Kurvenpunkte, sollen jetzt, was nach § 24, 4, II keine Beschränkung ist, die besonderen Parameter:

$$\beta_1 = \infty, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = -1 \tag{8}$$

haben, worauf nach (5) die in der konjugierten Ebene Π' liegenden Punkte werden:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -3, \quad \alpha_3 = 3. \tag{9}$$

Die Haupteckenpaare der drei an die Ebene Π sich anlehnenden Schmiegungstetraeder sind alsdann nach 3, I:

$$J_1, J_4 = \infty, 0; \quad J_1', J_4' = 1, -3; \quad J_1''J_4'' = -1, 3. \tag{10}$$

Das erste ist das Koordinatentetraeder, auf das sich, mit dem Einheitspunkt $J_0(\lambda = 1)$, die Parameterdarstellung § 28, (1):

$$y_1 = \lambda^3, \quad y_2 = \lambda^2, \quad y_3 = \lambda, \quad y_4 = 1; \tag{11}$$

$$v_1 = 1, \quad v_2 = -3\lambda, \quad v_3 = 3\lambda^2, \quad v_4 = -\lambda^3 \tag{11'}$$

bezieht. Für das zweite und dritte hat die Parameterdarstellung nach § 28, (9) ebenfalls die Form:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda'^3, & y_2' = \lambda'^2, \quad y_3' = \lambda', \quad y_4' = 1; \\ y_1'' = \lambda''^3, & y_2'' = \lambda''^2, \quad y_3'' = \lambda'', \quad y_4'' = 1, \end{cases} \tag{12}$$

wenn die neuen Parameter, aus § 28, (8) mit $\alpha, \beta, \gamma = -3, 1, -1$; $3, -1, \infty$:

$$\lambda' = -\frac{\lambda + 3}{\lambda - 1}, \quad \lambda'' = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1} \tag{13}$$

und die Einheitspunkte $J_0'(\lambda = -1)$ und $J_0''(\lambda = \infty)$ eingeführt werden.

I. *Führt man die drei an die Ebene der drei Kurvenpunkte* (8) *sich anlehnenden Schmiegungstetraeder als Koordinatentetraeder ein, so sind* (11), (12) *die zugehörigen kanonischen Parameterdarstellungen der Raumkurve und bestehen zwischen* $\lambda, \lambda', \lambda''$ *die Beziehungen* (13).

II. *Die Kantenpaare* $J_3 J_1$ *und* $J_2 J_4$, $J_3' J_1'$ *und* $J_2' J_4'$, $J_3'' J_1''$ *und* $J_2'' J_4''$ *teilen alsdann nach* § 28, **6** *alle die Sehnen* $\lambda_1 \lambda_2$, $\lambda_1' \lambda_2'$, $\lambda_1'' \lambda_2''$ *der Kurve harmonisch, für die bezüglich:*

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1' + \lambda_2' = 0, \quad \lambda_1'' + \lambda_2'' = 0 \tag{14}$$

oder nach (13) *in dem ersten Parameter* λ *ausgedrückt:*

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \quad \lambda_2 = -\frac{\lambda_1 - 3}{\lambda_1 + 1}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1 + 3}{\lambda_1 - 1}. \tag{15}$$

7. Das an eine Ebene sich anlehnende Haupttetraeder. I. Um nun die drei an die Ebene Π sich anlehnenden *Schmiegungstetraeder gleichmäßig* zu benutzen, führen wir *das an die Ebene* Π *sich anlehnende Haupttetraeder* $E_1 E_2 E_3 E_4$ ein. *Seine Ecken* E_1, E_2, E_3 *sollen die in der Ebene* Π *liegenden Kurvenpunkte* (8), *seine Ecke* E_4 *der Pol* P' *der zur Ebene* Π *konjugierten Ebene* Π' *sein.*

Die Koordinaten der neuen Ecken E_1, E_2, E_3 in bezug auf das Tetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ folgen nach (8) mit $\lambda = \infty, 1, -1$ aus (11):

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = 1, 0, 0, 0;\ 1, 1, 1, 1;\ -1, 1, -1, 1. \tag{16}$$

Ihre Verbindungsebene hat nach § 24, (28) die Gleichung:

$$\Pi\colon\ y_2 - y_4 = 0, \tag{17}$$

die konjugierte Ebene Π' nach § 32, (7') ($v_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 0, v_4 = -1$):

$$\Pi'\colon\ y_1 - 9y_3 = 0. \tag{18}$$

Die Pole P und $P' = E_4$ dieser beiden Ebenen haben nach § 29, (3') die Koordinaten:

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = 3, 0, -1, 0 \text{ und } 0, 3, 0, -1. \tag{19}$$

II. Indem wir den drei Koordinatengruppen (16) und der zweiten (19) noch die Faktoren $8, -1, 1, 2$ hinzufügen (I § 63, (6)), erhalten wir, bis auf einen jeweiligen Proportionalitätsfaktor, folgende *Beziehungen zwischen den auf die Tetraeder* $J_1 J_2 J_3 J_4$ *und* $E_1 E_2 E_3 E_4$ *bezogenen Punkt- und Ebenen-Koordinaten* y_k, v_k und x_k, u_k (I § 63, (25); (26)):

$$(20)\quad \begin{cases} y_1 = 8x_1 - x_2 - x_3, \\ y_2 = -x_2 + x_3 + 6x_4, \\ y_3 = -x_2 - x_3, \\ y_4 = -x_2 + x_3 - 2x_4; \end{cases} \qquad (21)\quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_3, \\ x_2 = -y_2 - 4y_3 - 3y_4, \\ x_3 = y_2 - 4y_3 + 3y_4, \\ x_4 = y_2 - y_4; \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} v_1 = u_1, \\ v_2 = -u_2 + u_3 + u_4, \\ v_3 = -u_1 - 4u_2 - 4u_3, \\ v_4 = -3u_2 + 3u_3 - u_4; \end{cases} \qquad (23)\quad \begin{cases} u_1 = 8v_1, \\ u_2 = -v_1 - v_2 - v_3 - v_4, \\ u_3 = -v_1 + v_2 - v_3 + v_4, \\ u_4 = 6v_2 - 2v_4. \end{cases}$$

8. Parameterdarstellung im Haupttetraeder. Setzt man nun in (21) und (23) die Werte (11) und (11′) ein, so ergibt sich:

In bezug auf das an die Ebene der drei Punkte $\lambda = \infty, 1, -1$ *der Raumkurve* (11), (11′) *sich anlehnende Haupttetraeder* $E_1E_2E_3E_4$ *lautet die Parameterdarstellung ihrer Punkte und Ebenen:*

$$(24)\quad \begin{cases} x_1 = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1), \\ x_2 = -(\lambda + 3)(\lambda + 1), \\ x_3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1), \\ x_4 = (\lambda - 1)(\lambda + 1); \end{cases} \qquad (25)\quad \begin{cases} u_1 = 8, \\ u_2 = (\lambda - 1)^3, \\ u_3 = -(\lambda + 1)^3, \\ u_4 = 2\lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3). \end{cases}$$

Da die Ecken E_1, E_2, E_3 die Punkte $\lambda = \infty, 1, -1$ der Kurve sind, hat die Gleichung $x_4 = 0$ nach (24) die Wurzeln $\lambda = \infty, 1, -1$ und haben die Gleichungen $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ nach (25) je dreifach die Wurzel $\lambda = \infty, 1, -1$ (§ 24, **6**). Da E_4 der Pol der Ebene der drei Punkte $\lambda = 0, -3, 3$ in (9), also nach § 29, **1** der Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen $\lambda = 0, -3, 3$ ist, gibt die Gleichung $u_4 = 0$ nach (25) diese Werte von λ als Wurzeln. Die drei Punkte $\lambda = 0, -3, 3$ liegen wiederum nach (24) bezüglich in den Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Die konjugierten Ebenen Π und Π' in (17) und (18), jetzt E_4 und etwa E_0 genannt, haben nach (20) im neuen System die Gleichungen[1]):

$$(26)\qquad \mathsf{E}_4 : x_4 = 0; \quad \mathsf{E}_0 : x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

und ihre Pole P und P' in (19), jetzt etwa E_0 und E_4 genannt, erhalten die Gleichungen:

$$(27)\qquad E_0 : u_1 + u_2 + u_3 = 0; \quad E_4 : u_4 = 0.$$

E_0 und E_0 treten als weitere Bestandteile zu dem Haupttetraeder hinzu.

1) Cremona, Ann. di mat. 2 (1859), S. 26.

9. Zyklische Vertauschung dreier Kanten des Haupttetraeders. Entnimmt man aus (24) die Verhältnisse von x_1, x_2, x_3 zu x_4 und führt alsdann mittels der Gleichungen (13) einmal λ' und einmal λ'' ein, so erhält man die folgende dreifache Darstellung der Raumkurve im Haupttetraeder:

$$(28) \qquad \frac{x_1}{x_4} = \lambda, \quad \frac{x_2}{x_4} = -\frac{\lambda+3}{\lambda-1}, \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{\lambda-3}{\lambda+1};$$

$$(28') \qquad \frac{x_1}{x_4} = \frac{\lambda'-3}{\lambda'+1}, \quad \frac{x_2}{x_4} = \lambda', \quad \frac{x_3}{x_4} = -\frac{\lambda'+3}{\lambda'-1};$$

$$(28'') \qquad \frac{x_1}{x_4} = -\frac{\lambda''+3}{\lambda''-1}, \quad \frac{x_2}{x_4} = \frac{\lambda''-3}{\lambda''+1}, \quad \frac{x_3}{x_4} = \lambda''.$$

Hiernach entspricht einer zyklischen Vertauschung der Parameter λ, λ', λ'' eine solche der Koordinaten x_1, x_2, x_3. Wie die Substitution (21) von (11) zu (28) führte, so würden in der Tat die aus (21) mit y_k' und y_k'' für y_k und mit zyklischer Vertauschung von x_1, x_2, x_3 hervorgehenden Substitutionen von (12) zu (28′) und (28″) führen. Man erhält daher aus (20) durch zweimalige zyklische Vertauschung von x_1, x_2, x_3 die Koordinaten y_1', y_2', y_3', y_4' und $y_1'', y_2'', y_3'', y_4''$ in x_1, x_2, x_3, x_4 ausgedrückt. Daraus folgt aber mit Rücksicht auf 7, I:

Einer zyklischen Vertauschung der drei an die Ebene E_4 sich anlehnenden Schmiegungstetraeder entspricht nur eine zyklische Vertauschung der drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 in dem einen an dieselbe Ebene sich anlehnenden Haupttetraeder.[1])

10. Die drei Reihen harmonisch geteilter Sehnen. Nun haben die Kanten J_3J_1 und J_2J_4 des ersten Schmiegungstetraeders $J_1J_2J_3J_4$ in **6** in bezug auf dieses die Gleichungen:

$$J_3J_1: y_2 = 0, \; y_4 = 0; \quad J_2J_4: y_3 = 0, \; y_1 = 0$$

oder nach (20) in bezug auf $E_1E_2E_3E_4$:

$$x_2 - x_3 = 0, \; x_4 = 0; \quad x_1 = 0, \; x_2 + x_3 = 0.$$

Durch zyklische Vertauschung von x_1, x_2, x_3 müssen nach **9** die Kanten $J_3'J_1'$ und $J_2'J_4'$; $J_3''J_1''$ und $J_2''J_4''$ der beiden anderen Schmiegungstetraeder entstehen, so daß mit Rücksicht auf **6**, II folgt:

Von den drei Linienpaaren:

$$(29) \quad \begin{cases} x_1 = 0, \; x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \; x_4 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0, \; x_3 + x_1 = 0, \\ x_3 - x_1 = 0, \; x_4 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 0, \; x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \; x_4 = 0 \end{cases}$$

---

1) Vgl. die zyklische Beziehung bei Reye, G. d. L. 2 (1892), S. 208.

werden die Sehnen $\lambda_1 \lambda_2$ harmonisch geteilt, für die bezüglich:

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \quad \lambda_2 = -\frac{\lambda_1 - 3}{\lambda_1 + 1}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1 + 3}{\lambda_1 - 1}. \tag{30}$$

Die ersten Linien der drei Paare (29) liegen alle in der Ebene E_0 in (26) und gehen alle durch deren Pol E_4 in (27), die zweiten Linien liegen alle in der Ebene E_4 und gehen alle durch deren Pol E_0 (4, II).

Zu jeder der drei Reihen von Sehnen (30) gehören *zwei Tangenten*, die Tangenten in den Punkten $\lambda = \infty$ und $\lambda = 0$; $\lambda = 1$ und $\lambda = -3$; $\lambda = -1$ und $\lambda = 3$.

11. Die Hyperboloide der harmonisch geteilten Sehnen. Den Ort der Sehnen, für deren Endpunkte λ_1, λ_2 die erste Bedingung (30) besteht, bildet nach § 28, (15) das Hyperboloid:

$$y_2 y_3 - y_1 y_4 = 0.$$

Überträgt man diese Gleichung durch (20) in das neue System und fügt die durch zyklische Vertauschung von x_1, x_2, x_3 entstehenden Gleichungen hinzu, so folgt:

Die drei Reihen von Sehnen, die durch die drei Linienpaare (29) *harmonisch geteilt werden, liegen bezüglich auf den drei Hyperboloiden:*

$$\begin{cases} H_1 = x_3 x_1 - x_1 x_2 - 2 x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 0, \\ H_2 = x_1 x_2 - x_2 x_3 - 2 x_2 x_4 + x_3 x_4 + x_1 x_4 = 0, \\ H_3 = x_2 x_3 - x_3 x_1 - 2 x_3 x_4 + x_1 x_4 + x_2 x_4 = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Sie gehören infolge der Identität:

$$H_1 + H_2 + H_3 = 0$$

einem Büschel an und haben außer der Raumkurve noch die Sehne:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1 : 1 \tag{32}$$

gemein (§ 31, 5, II), diejenige uneigentliche Sehne, die durch die nicht auf der Kurve liegende Ecke E_4 des Haupttetraeders geht.

12. Darstellung der Raumkurve im Haupttetraeder ohne Parameter. Der Sehnenkegel des Punktes $\lambda = \infty$ ist nach § 26, (18):

$$y_2 y_4 - y_3^2 = 0.$$

Überträgt man ihn mittels (20) in die neuen Koordinaten und fügt die durch zyklische Vertauschung entstehenden Sehnenkegel der Punkte $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ hinzu, so folgt im Sinne von § 24, (33):

I. *Die Raumkurve ist in bezug auf das Haupttetraeder durch die Gleichungen der Sehnenkegel in den drei Punkten E_1, E_2, E_3 dargestellt:*

$$(33)\ \begin{cases} x_2x_3 + (x_2 - x_3)x_4 + 3x_4^2 = 0, \quad x_3x_1 + (x_3 - x_1)x_4 + 3x_4^2 = 0, \\ \qquad\qquad x_1x_2 + (x_1 - x_2)x_4 + 3x_4^2 = 0. \end{cases}$$

Je zwei von ihnen haben eine Seite des Dreiecks $E_1E_2E_3$ gemein. Verbindet man die Gleichungen (33) mit den homogenen Parametern ϱ, σ, τ, so ergibt sich weiter (§ 31, 2):

II. *Das Bündel aller durch die Raumkurve* (33) *gehenden Flächen 2. O. hat die Gleichung:*

$$(34)\ \begin{cases} \varrho x_2x_3 + \sigma x_3x_1 + \tau x_1x_2 - (\sigma - \tau)x_1x_4 - (\tau - \varrho)x_2x_4 - (\varrho - \sigma)x_3x_4 \\ \quad + 3(\varrho + \sigma + \tau)x_4^2 = 0. \end{cases}$$

13. Polarbeziehung und linearer Komplex. Setzt man in (23) für v_k die Werte § 29, (3), mit $\varrho = 1$, und alsdann für y_k wieder die Werte (20) ein, so ergibt sich:

Zwischen Pol und Polarebene bestehen in bezug auf das Haupttetraeder die Beziehungen:

$$(35)\ \begin{cases} u_1 = x_2 - x_3 + 2x_4, \\ u_2 = x_3 - x_1 + 2x_4, \\ u_3 = x_1 - x_2 + 2x_4, \\ u_4 = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3; \end{cases} \qquad (36)\ \begin{cases} x_1 = 2u_2 - 2u_3 + u_4, \\ x_2 = 2u_3 - 2u_1 + u_4, \\ x_3 = 2u_1 - 2u_2 + u_4, \\ x_4 = -u_1 - u_2 - u_3. \end{cases}$$

Sie drücken zugleich die Polarverwandtschaft in bezug auf den *linearen Komplex* (§ 29, **14**, II):

$$(37)\qquad \varphi = p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + 2p_6 = 0$$

aus (II § 86, (1); (19)), dem nach § 25, **8** und § 27, **6** Tangenten und Schmiegungsstrahlen der Raumkurve angehören. Zwischen *reziproken Polaren* p_k und p_k' bestehen daher in bezug auf das Haupttetraeder die Gleichungen (II § 86, (24)):

$$(38)\qquad \begin{cases} p_1' = 2\varphi - 6p_1, \quad p_2' = 2\varphi - 6p_2, \quad p_3' = 2\varphi - 6p_3, \\ p_4' = \varphi - 6p_4, \quad\ \ p_5' = \varphi - 6p_5, \quad\ \ p_6' = \varphi - 6p_6. \end{cases}$$

14. Die Doppelpyramidengruppe im Haupttetraeder. Die Gesamtheit der drei Gleichungen (33), welche die Raumkurve vollständig definieren, geht durch Vertauschung von x_1, x_2, x_3 mit:

$$(39)\ \begin{cases} s_0: x_1, x_2, x_3; \quad s_1: -x_1, -x_3, -x_2; \quad s_2: -x_3, -x_2, -x_1; \\ s_3: -x_2, -x_1, -x_3; \quad s_4: x_2, x_3, x_1; \quad s_5: x_3, x_1, x_2 \end{cases}$$

jedesmal in sich über (ähnlich wie der Kegelschnitt: $x_1x_2 - x_3^2 = 0$ durch Vert. von x_1, x_2 mit x_1, x_2; x_2, x_1; $-x_1, -x_2$; $-x_2, -x_1$).

Zu jedem Hauptletraeder gehört eine Doppelpyramidengruppe[1] (39), *durch welche die Raumkurve in sich übergeht.*

Die Substitutionen s_1, s_2, s_3 entsprechen nach (28) und (14) der Vertauschung der Punkte λ und $-\lambda$, λ' und $-\lambda'$, λ'' und $-\lambda''$, deren Sehne durch eines der drei Linienpaare (29) harmonisch geteilt wird, die Substitutionen s_4, s_5 der zyklischen Vertauschung der drei Schmiegungstetraeder unter **9**.

Für die Bündelgleichung (34) ist die Gruppe (39) gleichbedeutend mit der *Gruppe der sechs Permutationen der drei Parameter* ϱ, σ, τ.

Die Fläche $\varrho = \sigma = \tau = 1$:

$$x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 + 9 x_4^2 = 0 \tag{40}$$

bleibt daher *bei allen Substitutionen der Gruppe invariant* (vgl. § 21, (30)).

15. Allgemeine Parameter im Haupttetraeder. Durch Einführung des Haupttetraeders ist in allen vom Parameter λ freien Gleichungen (26), (27), (29), (31) bis (40) vollkommene Symmetrie in den Koordinaten $x_1 : x_4$, $x_2 : x_4$, $x_3 : x_4$ hergestellt. Um dies auch in der Parameterdarstellung (24) zu erreichen, müssen die drei Punkte E_1, E_2, E_3, an deren Ebene Π sich das Haupttetraeder anlehnt, statt der besonderen Parameter $\infty, 1, -1$ in (8) allgemeine α, β, γ erhalten. Die Schnittpunkte mit der konjugierten Ebene Π' werden dann an Stelle von $0, -3, 3$ nach § 33, (16):

$$\alpha' = \frac{2\beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta}{\beta + \gamma - 2\alpha}, \quad \beta' = \frac{2\gamma\alpha - \alpha\beta - \beta\gamma}{\gamma + \alpha - 2\beta}, \quad \gamma' = \frac{2\alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha}{\alpha + \beta - 2\gamma}, \tag{41}$$

worin noch zur Abkürzung gesetzt werde:

$$\alpha_0 = \beta + \gamma - 2\alpha, \quad \beta_0 = \gamma + \alpha - 2\beta, \quad \gamma_0 = \alpha + \beta - 2\gamma. \tag{42}$$

Führt man nun durch die Substitution:

$$\lambda = \frac{\alpha_0(\alpha' - \mu)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \mu)} \tag{43}$$

einen neuen Parameter μ ein, so wird zunächst:

$$\begin{cases} \lambda - 1 = 2\dfrac{(\gamma - \alpha)(\beta - \mu)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \mu)}, & \lambda + 1 = -2\dfrac{(\alpha - \beta)(\gamma - \mu)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \mu)}, \\ \lambda + 3 = -2\dfrac{\beta_0(\beta' - \mu)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \mu)}, & \lambda - 3 = -2\dfrac{\gamma_0(\gamma' - \mu)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \mu)}. \end{cases} \tag{44}$$

Damit wird aus (28):

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{\alpha_0(\alpha' - \mu)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \mu)}, \quad \frac{x_2}{x_4} = \frac{\beta_0(\beta' - \mu)}{(\gamma - \alpha)(\beta - \mu)}, \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{\gamma_0(\gamma' - \mu)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \mu)} \tag{45}$$

und folgt mit gleichzeitiger Umformung von (25):

---

1) H. Weber, Algebra, 2. Aufl. 2 (1899), S. 270.

In dem an die Ebene der drei Punkte α, β, γ sich anlehnenden Haupttetraeder lautet die Parameterdarstellung der Raumkurve:

$$(46)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\alpha_0}{\beta - \gamma}(\alpha' - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu), \\ x_2 = \dfrac{\beta_0}{\gamma - \alpha}(\beta' - \mu)(\gamma - \mu)(\alpha - \mu), \\ x_3 = \dfrac{\gamma_0}{\alpha - \beta}(\gamma' - \mu)(\alpha - \mu)(\beta - \mu), \\ x_4 = (\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu); \end{cases}$$

$$(47)\quad \begin{cases} u_1 = (\beta - \gamma)^3(\alpha - \mu)^3, \\ u_2 = (\gamma - \alpha)^3(\beta - \mu)^3, \\ u_3 = (\alpha - \beta)^3(\gamma - \mu)^3, \\ u_4 = \alpha_0\beta_0\gamma_0(\alpha' - \mu)(\beta' - \mu)(\gamma' - \mu), \end{cases}$$

wo α', β', γ' die drei Punkte (41) *der konjugierten Ebene sind und $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Werte* (42) *haben.*

Aus (45) geht weiter hervor:

$$(48)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1}{x_4} - 1\right) = \dfrac{(\gamma-\alpha)(\beta-\mu)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\mu)}, & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1}{x_4} + 1\right) = -\dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\mu)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\mu)}, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_2}{x_4} - 1\right) = \dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\mu)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\mu)}, & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_2}{x_4} + 1\right) = -\dfrac{(\beta-\gamma)(\alpha-\mu)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\mu)}, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_3}{x_4} - 1\right) = \dfrac{(\beta-\gamma)(\alpha-\mu)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\mu)}; & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_3}{x_4} + 1\right) = -\dfrac{(\gamma-\alpha)(\beta-\mu)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\mu)}. \end{cases}$$

Danach erkennt man sofort, daß die Parameterdarstellung (45) oder (46) die Gleichungen (33), die in der Form geschrieben werden können:

$$(49)\quad \frac{1}{4}\left(\frac{x_2}{x_4} - 1\right)\left(\frac{x_3}{x_4} + 1\right) + 1 = 0,\ \frac{1}{4}\left(\frac{x_3}{x_4} - 1\right)\left(\frac{x_1}{x_4} + 1\right) + 1 = 0,$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{x_4} - 1\right)\left(\frac{x_2}{x_4} + 1\right) + 1 = 0,$$

identisch in μ erfüllt.

16. Die Doppelpyramidengruppe des allgemeinen Parameters. In dem bisherigen Parameter λ drücken sich die Substitutionen (39), gleichbedeutend mit (14) und (13) bei gleichmäßiger Bezeichnung in der Form aus:

$$(50)\quad s_1 : \lambda + \lambda' = 0;\quad s_2 : \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} + \frac{\lambda' + 3}{\lambda' - 1} = 0;\quad s_3 : \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1} + \frac{\lambda' - 3}{\lambda' + 1} = 0;$$
$$s_4 : \lambda' = -\frac{\lambda + 3}{\lambda - 1};\quad s_5 : \lambda' = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}.$$

In dem neuen Parameter μ werden sie daher nach (43), (44):

$$(51)\ s_1: \frac{\alpha' - \mu}{\alpha - \mu} + \frac{\alpha' - \mu'}{\alpha - \mu'} = 0;\ s_2: \frac{\beta' - \mu}{\beta - \mu} + \frac{\beta' - \mu'}{\beta - \mu'} = 0;\ s_3: \frac{\gamma' - \mu}{\gamma - \mu} + \frac{\gamma' - \mu'}{\gamma - \mu'} = 0$$

$$(52)\ s_4: \frac{\alpha_0(\alpha' - \mu')}{(\beta - \gamma)(\alpha - \mu')} = \frac{\beta_0(\beta' - \mu)}{(\gamma - \alpha)(\beta - \mu)};\ s_5: \frac{\alpha_0(\alpha' - \mu')}{(\beta - \gamma)(\alpha - \mu')} = \frac{\gamma_0(\gamma' - \mu)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \mu)}.$$

Die Substitutionen (51) sind die Involutionen:

$$(53)\qquad \alpha\alpha' - \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')(\mu + \mu') + \mu\mu' = 0,\ \cdots,\ \cdots$$

bei denen die Punkte μ, μ' harmonisch sind (§ 30, (3)) zu α, α'; β, β' oder γ, γ'.

Drückt man jedoch die Koeffizienten durch die gegebenen Parameter α, β, γ allein aus, und fügt die Entwicklung der Gleichungen (52) hinzu, so folgt:

Der Doppelpyramidengruppe (39) *entsprechen folgende Substitutionen des Parameters* μ *in der Darstellung* (46):

$$\begin{aligned}
(54)\ s_0:1;\ s_1&:(\beta+\gamma-2\alpha)\mu\mu'+(\alpha^2-\beta\gamma)(\mu+\mu')+\alpha(2\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta)=0;\\
s_2&:(\gamma+\alpha-2\beta)\mu\mu'+(\beta^2-\gamma\alpha)(\mu+\mu')+\beta(2\gamma\alpha-\alpha\beta-\beta\gamma)=0;\\
s_3&:(\alpha+\beta-2\gamma)\mu\mu'+(\gamma^2-\alpha\beta)(\mu+\mu')+\gamma(2\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_4:&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta)\mu\mu'-(\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2+\alpha\beta^2-3\alpha\beta\gamma)\mu\\
&-(\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha^2\beta-3\alpha\beta\gamma)\mu'+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2-(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma=0;\\
s_5:&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta)\mu\mu'-(\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha^2\beta-3\alpha\beta\gamma)\mu\\
&-(\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2+\alpha\beta^2-3\alpha\beta\gamma)\mu'+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2-(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma=0
\end{aligned}$$

(vgl. § 33, (24)). Sie kommen mit $\alpha = \infty$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\mu = \lambda$, $\mu' = \lambda'$ wieder auf (50) zurück.

§ 35. Übergang von kanonischen Tetraeder- zu rechtwinkligen Koordinaten.

1. Die Transformationsformeln. In den auf ein Schmiegungstetraeder bezogenen Tetraederkoordinaten y_k, v_k waren die Punkte und Ebenen der Raumkurve durch die Gleichungen § 34, (11); (11') dargestellt, in homogenen rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichungen § 7, (1); (11).

Bei gleichbleibendem Parameter λ gelten daher zwischen den beiderlei Koordinaten die Beziehungen:

$$(1)\begin{cases} x = ay_1 + a'y_2 + a''y_3,\\ y = \qquad\ \ by_2 + b'y_3,\\ z = \qquad\qquad\quad cy_3,\\ t = ly_2 + my_3 + ny_4; \end{cases}\qquad (2)\begin{cases} u = bcnv_1,\\ v = c(-a'nv_1 + anv_2 - alv_4),\\ w = (a'b' - a''b)nv_1 - ab'nv_2\\ \qquad + abnv_3 + a(b'l - bm)v_4,\\ s = abcv_4. \end{cases}$$

Umgekehrt führt die Auflösung dieser Gleichungen nach y_k und v_k bis auf einen Proportionalitätsfaktor zurück zu den bereits in § 7, (3); (13), ohne die Bezeichnung als Tetraederkoordinaten, benutzten Ausdrücke:

$$(3)\begin{cases} y_1 = bcnx - a'n(cy - b'z) - a''bnz, \\ y_2 = an(cy - b'z), \\ y_3 = abnz, \\ y_4 = -al(cy - b'z) - ab(mz - ct); \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} v_1 = au, \\ v_2 = a'u + bv + ls, \\ v_3 = a''u + b'v + cw + ms, \\ v_4 = ns. \end{cases}$$

Die Formeln (1)—(4) *vermitteln den Übergang zwischen den rechtwinkligen Koordinaten* x, y, z, t; u, v, w, s *und den Tetraederkoordinaten* y_k, v_k, *die einerseits in* §§ 1—23 *und anderseits in* §§ 24—34 *als Grundlage dienten.*

2. Polarverwandtschaft in rechtwinkligen Koordinaten. Durch Verbindung der Formeln (2) und (3) mit § 29, (3) entstehen die in § 8, (23) angegebenen *Beziehungen zwischen den rechtwinkligen Koordinatrn von Pol und Polarebene in bezug auf die Raumkurve 3. O.*

3. Die konjugierte der unendlich fernen Ebene. *Die unendlich ferne Ebene,* $t = 0$ im rechtwinkligen System, hat nach (1) *in Tetraederkoordinaten* die Gleichung:

$$(5) \qquad ly_2 + my_3 + ny_4 = 0$$

und die Koordinaten:

$$(6) \qquad v_1 = 0,\ v_2 = l,\ v_3 = m,\ v_4 = n.$$

Daher sind die Koordinaten der *konjugierten Ebene* nach § 32, (7'):

$$(7) \qquad v_1' = 2l^3,\ v_2' = 3l^2m,\ v_3' = 3l(6ln - m^2),\ v_4' = m(9ln - 2m^2).$$

Die zur unendlich fernen Ebene konjugierte hat in Tetraederkoordinaten die Gleichung:

$$(8) \qquad l^3y_1 + \tfrac{3}{2}l^2my_2 + 3l(3ln - \tfrac{1}{2}m^2)y_3 + m(\tfrac{9}{2}ln - m^2)y_4 = 0.$$

Setzt man die Werte (7) unter Weglassung der Akzente in (2) ein, so folgt für die rechtwinkligen Koordinaten der zur unendlich fernen Ebene konjugierten:

$$(9)\begin{cases} u = 2bcl^3n,\ v = -2cl(a'l^2n + am(3ln - m^2)), \\ w = 2(a'b' - a''b)l^3n + 6ab'l^2mn + 6abln(3ln - 2m^2) - 2a(b'l - bm)m^3, \\ s = abcm(9ln - 2m^2). \end{cases}$$

Für die vier Arten der Raumkurve § 6, (18) ergibt sich hieraus mit:

$l = 1,\ m = 0,\ n = \varepsilon e^2 : u = 2bce^2,\ v = -2a'ce^2,\ w = 2(a'b' - a''b)e^2 + 18ab\varepsilon e^4,\ s = 0;$

$l = 0,\ m = 1,\ n = -e : u = 0,\ v = 0,\ w = 2ab,\ s = -2abc;$

$l = 0,\ m = 0, n = 1 : u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ s = 0.$

Die zur unendlich fernen Ebene konjugierte ist bei der kub. Ellipse ($\varepsilon = 1$) *und Hyperbel* ($\varepsilon = -1$):

$$c(bx - a'y) + (a'b' - a''b + 9ab\varepsilon e^2)z = 0; \tag{10}$$

bei der kub. hyperbolischen Parabel:

$$z - ct = 0; \tag{11}$$

bei der kub. Parabel unbestimmt.

Die Ebene (11) ist die *Schmiegungsebene der kub. hyperbolischen Parabel* § 7, (27) im doppelt zählenden unendlich fernen Punkte $\lambda = \infty$, da die unendlich ferne Ebene Tangentialebene in diesem Punkte ist (§ 32, **6**, III).

Bei der *kub. Parabel* sind der unendlich fernen Ebene, der Schmiegungsebene im Punkte $\lambda = \infty$, nach § 32, **6**, III alle Tangentialebenen im Punkte $\lambda = \infty$ konjugiert, also nach § 24, (29) die Ebenen:

$$y_3 - \lambda_0 y_4 = 0 \tag{12}$$

oder nach (3) bei beliebigem λ_0 (§ 8, (39)):

$$z - c\lambda_0 t = 0. \tag{13}$$

4. Die Scheitelpunkte der Raumkurve. Die drei in der unendlich fernen Ebene liegenden Kurvenpunkte haben für die drei ersten Arten nach § 6, (19) die Parameter:

$$\lambda_1 = \infty,\ \lambda_2 = ei,\ \lambda_3 = -ei;\ \lambda_1 = \infty,\ \lambda_2 = e,\ \lambda_3 = -e; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \infty,\ \lambda_3 = e. \tag{14}$$

Für die Schnittpunkte mit der konjugierten Ebene ist daher nach § 33, (16); (17):

$$\lambda_1' = 0,\ \lambda_2' = -3ei,\ \lambda_3' = 3ei;\ \lambda_1' = 0,\ \lambda_2' = -3e,\ \lambda_3' = 3e; \quad \lambda_1' = \lambda_2' = \lambda_3' = \infty. \tag{15}$$

Bei der kub. Parabel, wo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \infty$ und nach § 33, (18) $\lambda_1' = \lambda_2' = \lambda_3'$ unbestimmt wird, tritt dafür nach (13) bei beliebigem λ_0 ein:

$$\lambda_1' = \lambda_2' = \infty,\ \lambda_3' = \lambda_0. \tag{15'}$$

Daraus folgt nach § 11, 2; 3:

Die reellen endlichen Schnittpunkte der zur unendlich fernen Ebene konjugierten Ebene mit der Raumkurve sind deren Scheitelpunkte.

Die kub. Ellipse hat einen Scheitelpunkt $\lambda = 0$, *die kub. Hyperbel drei* $\lambda = 0, -3e, 3e$, *die kub. hyperbolische Parabel keinen, die kub. Parabel alle ihre Punkte* λ_0 *als Scheitelpunkte.*

5. Die Ebene des Mittelpunktskegelschnittes. Die Pole einer festen Ebene in bezug auf alle Achsenkegelschnitte λ bilden nach § 32, **10** den Polkegelschnitt der Ebene. Der Polkegelschnitt der unendlich fernen Ebene ist daher der Ort der Mittelpunkte aller Achsenkegelschnitte, der in § 10, (19) eingeführte Mittelpunktskegelschnitt der Raumkurve. Aus § 32, **11** folgt alsdann:

Der Mittelpunktskegelschnitt der Raumkurve liegt in der zur unendlich fernen Ebene konjugierten Ebene (vgl. (10); (11); (13) mit § 10, (25); (29)); (30).[1])

Überhaupt liegen die Mittelpunkte aller Flächen der Scharschar § 10, (43) *in dieser Ebene.*[2])

Denn die Elimination von $\varkappa, \varrho, \sigma, \tau$ aus den Gleichungen § 10, (19):

$$\varkappa x = b_{14}, \ \varkappa y = b_{24}, \ \varkappa z = b_{34}, \ \varkappa t = b_{44}$$

gibt dasselbe Resultat, gleichviel ob in den Werten § 10, (44) der b_{kl} die Parameter ϱ, σ, τ ganz beliebig gelassen oder gleich $\lambda^2, \lambda, 1$ (§ 10, (6)) genommen werden, nämlich die Gleichung der Ebene (9) (vgl. § 32, **1**, (4′)).

6. Die Durchmesser der Raumkurve. Wie nach § 34, **3** an jede gegebene Ebene, so lehnen sich auch an die unendlich ferne Ebene drei Schmiegungstetraeder an. Da deren Kanten P_3P_1 unendlich fern werden, geht die harmonische Teilung der Sehnen, welche die Kanten P_3P_1 und P_2P_4 nach § 34, **4**, III schneiden, in Halbierung durch die Kante P_2P_4 über.

Die im Endlichen liegende Kante P_2P_4 *eines Schmiegungstetraeders, das sich mit der Kante* P_3P_1 *an die unendlich ferne Ebene anlehnt, halbiert alle die beiden Kanten schneidenden Sehnen der Kurve, ist also ein „Durchmesser" der Kurve.*

Die so sich ergebenden Durchmesser der Kurve liegen in der zur unendlich fernen Ebene Π konjugierten Ebene Π' und sind nach § 34, **4**, II die Verbindungslinien des Poles P' der Ebene Π' mit den

1) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 288; 2 (1859), S. 22.

2) Reye, Hamburger Mitteil. 2 (1890), S. 54.

in ihr liegenden Kurvenpunkten, also nach 4, soweit diese endlich und reell sind, den Scheitelpunkten der Kurve.

Bei der kub. Ellipse gibt es daher einen solchen „*Scheiteldurchmesser*", bei der kub. Hyperbel drei (§ 11, 8).

Bei der *kub. hyperbol. Parabel* lehnt sich nach § 34, 5, I nur ein Schmiegungstetraeder an die unendlich ferne Ebene Π und ihre konjugierte Π' an, für welches Π und Π' selbst die Seitenflächen Π_2 und Π_1 und der doppelt zählende unendlich ferne Punkt $\lambda = \infty$ der Kurve die Hauptecke P_4 und der einfach zählende $\lambda = e$ die Hauptecke P_1 ist. Die Kante $P_2 P_4$ ist der Durchmesser, der diesem Schmiegungstetraeder entspricht (Fig. 50, S. 170). Er ist aber mangels eines Scheitelpunktes *kein Scheiteldurchmesser* (§ 11, 8; 9).

Bei der kub. Parabel gibt es nach § 34, 5, II unendlich viele Schmiegungstetraeder, die sich an die unendlich ferne Ebene anlehnen und durch den unendlich fernen Punkt $\lambda = \infty$ als Hauptecke P_1 und je einen beliebigen endlichen Kurvenpunkt $\lambda = \lambda_0$ als Hauptecke P_4 bestimmt sind. Zu jedem gehört eine Kante $P_2 P_4$ als *Scheiteldurchmesser* (§ 11, 8).

7. Gleichungen der Scheiteldurchmesser in Tetraederkoordinaten. Die unendlich ferne Ebene Π und ihre konjugierte Π' sind durch die Gleichungen (5) und (8) dargestellt; ihre Pole P und P' haben nach § 29, (3′) die Koordinaten:

(16) $P: 3n,\ -m,\ l,\ 0;\ P': -m(9ln - 2m^2),\ l(6ln - m^2),\ -l^2m,\ 2l^3.$

Für die *kub. Ellipse* ($l = 1,\ m = 0,\ n = e^2$) wird aus (5), (8), (16):

(17) $\Pi: y_2 + e^2 y_4 = 0;\ \Pi': y_1 + 9e^2 y_3 = 0;\ P: 3e^2, 0, 1, 0;\ P': 0, 3e^2, 0, 1.$

Dem einzigen unendlich fernen Punkte $\beta_1 = \infty$ entspricht nach (15) der Scheitelpunkt $\alpha_1 = 0$, und daher nach § 34, (7) *der Scheiteldurchmesser:*

(18) $$y_1 = 0,\ y_3 = 0.$$

Für die *kub. Hyperbel* ($l = 1,\ m = 0,\ n = -e^2$) wird ebenso:

(19) $\Pi: y_2 - e^2 y_4 = 0;\ \Pi': y_1 - 9e^2 y_3 = 0;\ P: 3e^2, 0, -1, 0;\ P': 0, 3e^2, 0, -1.$

Den unendlich fernen Punkten $\beta_1 = \infty,\ \beta_2 = e,\ \beta_3 = -e$ entsprechen nach (15) die Scheitelpunkte $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -3e,\ \alpha_3 = 3e$, und daher nach § 34, (7) *die drei Scheiteldurchmesser:*

(20) $y_1 = 0,\ y_3 = 0;\ y_1 - 9e^2 y_3 = 0,\ y_2 + 4\varepsilon e y_3 + 3e^2 y_4 = 0\ (\varepsilon = 1, -1).$

Sie liegen alle drei in der Ebene Π' und gehen alle drei durch deren Pol P' in (19).

Für die *kub. hyperbol. Parabel* ($l = 0$, $m = 1$, $n = -e$) wird:

$$(21)\quad \Pi: y_3 - e y_4 = 0;\ \Pi': y_4 = 0;\ P: 3e, 1, 0, 0;\ P': 1, 0, 0, 0.$$

Dem unendlich fernen Punkte $\beta_1 = e$ entspricht nach (15) der Punkt $\alpha_1 = \infty$, und daher nach § 34, (7) der *Durchmesser*:

$$(22)\qquad y_4 = 0, \quad y_2 - 2 e y_3 = 0.$$

Für die *kub. Parabel* ($l = 0$, $m = 0$, $n = 1$) wird nach (5); (12); § 29, (3):

$$(23)\quad \Pi: y_4 = 0;\ \Pi': y_3 - \lambda_0 y_4 = 0;\ P = 1, 0, 0, 0;\ P' = 3\lambda_0, 1, 0, 0.$$

Der dem Schmiegungstetraeder $\beta_1 = \infty$, $\alpha_1 = \lambda_0$ in (15') entsprechende *Durchmesser* $P_2 P_4$ hat nach § 34, (7) die Gleichungen:

$$(24)\qquad y_3 - \lambda_0 y_4 = 0, \quad y_1 - 3\lambda_0 y_2 + 2\lambda_0^2 y_3 = 0.$$

8. Gleichungen der Scheiteldurchmesser im rechtwinkligen System. Mittels der Formeln (3) können wir endlich auf das rechtwinklige System der Parameterdarstellung § 7, (1) zurückgehen. Die unendlich ferne Ebene Π erhält dann die Gleichung $t = 0$, ihre konjugierte Π' die Gleichungen (10), (11) oder (13).

Der Scheiteldurchmesser (18) *der kub. Ellipse* wird dann:

$$(25)\qquad bx - a'y = 0, \quad z = 0,$$

und die Pole (17) der Ebenen Π und Π' erhalten nach (1) die Koordinaten:

$$(26)\qquad \begin{aligned} &P: x = 3ae^2 + a'', \quad y = b', \quad z = c, \quad t = 0;\\ &P': x = \tfrac{3}{4}a', \quad y = \tfrac{3}{4}b, \quad z = 0, \quad t = 1. \end{aligned}$$

Die drei Scheiteldurchmesser (20) *der kub. Hyperbel* werden:

$$(27)\ \begin{cases} bx - a'y = 0;\\ \qquad z = 0; \end{cases} \quad (28)\begin{cases} c(bx - a'y) - (9abe^2 - a'b' + a''b)z = 0,\\ 4cy + 4(\varepsilon be - b')z - 3bct = 0, \end{cases}$$

$\varepsilon = \pm 1$, und die Pole der Ebenen Π und Π':

$$(29)\qquad \begin{aligned} &P: x = -3ae^2 + a'', \quad y = b', \quad z = c, \quad t = 0;\\ &P': x = \tfrac{3}{4}a', \quad y = \tfrac{3}{4}b, \quad z = 0, \quad t = 1. \end{aligned}$$

Die drei Durchmesser liegen in der Ebene (10) und gehen durch den Punkt P' in (29), den *Mittelpunkt* der Kurve (§ 19, (5)).

Der *Durchmesser* (22) der *kub. hyperbol. Parabel* wird:

$$(30)\qquad y - (2be + b')t = 0, \quad z - ct = 0,$$

die *Mittelpunktsachse* des hyperbol. Zylinders (§ 11, (41)).

Endlich ergibt sich für den durch *den Punkt* λ_0 *gehenden Scheiteldurchmesser* (24) *der kub. Parabel* in Übereinstimmung mit § 23, (12):

(31) $z - c\lambda_0 t = 0,\ bcx - (3a\lambda_0 + a')cy + (2ab\lambda_0^2 + 3ab'\lambda_0 + a'b' - a''b)z = 0.$

III. Kapitel.

Erzeugung und Beziehung zwischen Punkten der Raumkurve 3. Ordnung.

§ 36. Erzeugung der Raumkurve 3. Ordnung durch projektive Büschel und Bündel.

1. Drei projektive Ebenenbüschel. Es seien:

$$(1)\quad \begin{cases} L = \sum_1^4 {}^k u_k x_k = 0, \\ L' = \sum_1^4 {}^k u_k' x_k = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} M = \sum_1^4 {}^k v_k x_k = 0, \\ M' = \sum_1^4 {}^k v_k' x_k = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} N = \sum_1^4 {}^k w_k x_k = 0, \\ N' = \sum_1^4 {}^k w_k' x_k = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen von drei mal zwei Ebenen. Dann stellen die Gleichungen:

$$(2)\qquad L - tL' = 0,\quad M - tM' = 0,\quad N - tN' = 0$$

mit einem Parameter t *drei projektive Ebenenbüschel* dar (I § 66, 4). Bezeichnet man für die Matrix der Koeffizienten der Gleichungen (2):

$$(3)\qquad T = \begin{vmatrix} u_1 - tu_1' & u_2 - tu_2' & u_3 - tu_3' & u_4 - tu_4' \\ v_1 - tv_1' & v_2 - tv_2' & v_3 - tv_3' & v_4 - tv_4' \\ w_1 - tw_1' & w_2 - tw_2' & w_3 - tw_3' & w_4 - tw_4' \end{vmatrix}$$

die Unterdeterminanten, die durch Streichung der 1., 2., 3. oder 4. Kolonne und Zufügung abwechselnder Vorzeichen +, —, +, — entstehen, mit T_1, T_2, T_3, T_4, so gibt die Auflösung der Gleichungen (2) nach x_k (I Anm. 2, III, (14)):

$$(4)\qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = T_1 : T_2 : T_3 : T_4.$$

Dabei ist allgemein T_k eine ganze Funktion 3. Grades von t, etwa:

$$(5)\qquad T_k = a_{k1}t^3 + a_{k2}t^2 + a_{k3}t + a_{k4}.$$

Setzen wir daher:

$$(6)\qquad A = |a_{kl}| \neq 0$$

voraus, so ergibt sich nach § 24, (1) unter Hinzufügung des dualen Satzes:

Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen dreier projektiven Ebenenbüschel ist eine Raumkurve 3. O.[1])

Die Verbindungsebenen entsprechender Punkte dreier projektiven Punktreihen bilden einen Ebenenbüschel 3. O.[2])

2. Bedeutung der Bedingung $A \neq 0$. Sollten die drei Ebenen (2) für einen Wert t mehr als einen Punkt gemein haben, etwa eine gerade Linie, so müßte mit drei Faktoren λ, μ, ν, die nicht sämtlich verschwinden, identisch in x_k sein:

$$\lambda(L - tL') + \mu(M - tM') + \nu(N - tN') = 0 \tag{7}$$

also für $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\lambda(u_k - tu_k') + \mu(v_k - tv_k') + \nu(w_k - tw_k') = 0. \tag{8}$$

Dazu müßten aber die vier Unterdeterminanten (5) für dieses t alle verschwinden, was nach (6) nicht möglich.

Die Bedingung (6) *bewirkt, daß entsprechende Ebenen der drei Büschel* (2) *niemals mehr als einen Punkt gemein haben.*[3])

3. Zwei projektive Ebenenbündel. Durch die sechs Ebenen (1) werden andererseits zwei projektive Ebenenbündel:

$$\begin{cases} \lambda L + \mu M + \nu N = 0, \\ \lambda L' + \mu M' + \nu N' = 0, \end{cases} \tag{9}$$

bestimmt (I § 68, 1), die keine Ebene entsprechend gemein haben. Sonst müßte für diese Ebene λ, μ, ν eine Identität von der Form:

$$(\lambda L + \mu M + \nu N) - t(\lambda L' + \mu M' + \nu N') = 0 \tag{10}$$

bestehen, was mit (7) übereinkäme und nach (6) nicht möglich ist.

Je zwei entsprechende Ebenen haben daher eine Gerade gemein.

Die Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier projektiven Ebenenbündel bilden eine Strahlenkongruenz.

Die Achsenkoordinaten q_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ der Linien der Kongruenz sind die Unterdeterminanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1 & \lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2 & \lambda u_3 + \mu v_3 + \nu w_3 & \lambda u_4 + \mu v_4 + \nu w_4 \\ \lambda u_1' + \mu v_1' + \nu w_1' & \lambda u_2' + \mu v_2' + \nu w_2' & \lambda u_3' + \mu v_3' + \nu w_3' & \lambda u_4' + \mu v_4' + \nu w_4' \end{vmatrix}, \tag{11}$$

sind also rational in den beiden Parametern $\lambda : \mu : \nu$.

---

1) M. Chasles, J. de Math. (2) 2 (1857), S. 402 (Nr. 27). H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 36.

2) Schröter, ebd. S. 30. 3) v. Staudt, Beitr. (1860), S. 304.

4. Zwei projektive Strahlbündel. Durch die sechs Ebenen (1) sind ferner zwei projektive Strahlbündel:

$$(12)\qquad \begin{cases} L:M:N=\lambda:\mu:\nu, \\ L':M':N'=\lambda:\mu:\nu, \end{cases}$$

bestimmt (I § 68, 2), mit gleichen Zentren, wie die Ebenenbündel (9).

Zwei entsprechende Strahlen der beiden Bündel (12) werden sich im allgemeinen nicht schneiden. Gibt es aber für geeignetes $\lambda:\mu:\nu$ einen Punkt, der beiden Gleichungen (12) genügt, so muß für diesen:

$$(13)\qquad L:M:N=L':M':N'$$

oder mit einem Faktor t:

$$(14)\qquad L-tL'=0,\quad M-tM'=0,\quad N-tN'=0.$$

Diesen Gleichungen genügt aber nach (2) nur ein Punkt, der die Koordinaten (4) hat. Die Strahlbündel können keinen Strahl entsprechend gemein haben.

Der Ort der Schnittpunkte sich schneidender entsprechenden Strahlen zweier projektiven Strahlbündel ist eine Raumkurve 3. O.[1])

Die Verbindungsebenen sich schneidender entsprechenden Strahlen zweier projektiven Strahlfelder bilden einen Ebenenbüschel 3. O.[2])

5. Die Scheitelpunkte der beiden Bündel. Die Scheitelpunkte S und S':

$$(15)\qquad L=0,\ M=0,\ N=0;\quad L'=0,\ M'=0,\ N'=0$$

der Bündel (9) oder (12) sind, mit den Werten $t=0$ und $t=\infty$, Schnittpunkte entsprechender Ebenen der drei projektiven Ebenenbüschel (2) und (14).

Daher sind die Scheitel S und S' der beiden Bündel (9) *oder* (12) *selbst Punkte der Raumkurve*[1]) (vgl. § 30, 5).

6. Die Achsen der drei Büschel. Die Achsen l, m, n der drei Ebenenbüschel (2):

$$(16)\qquad L=0,\ L'=0;\quad M=0,\ M'=0;\quad N=0,\ N'=0$$

sind, mit den Wertsystemen $\lambda, \mu, \nu = 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1$, Schnittlinien entsprechender Ebenen der Bündel (9).

Daher sind die Achsen l, m, n der drei Büschel (2) *Strahlen der Kongruenz* (11) *der beiden Ebenenbündel* (9).

---

1) Fr. Seydewitz, Arch. Math. Phys. 10 (1847), S. 205.

2) H. Schröter, J. f. Math. 56 (1859), S. 38.

7. Die Kongruenz der Sehnen. Jeder Punkt der Raumkurve ist, einem Werte t entsprechend, durch die drei Gleichungen (2) bestimmt. Da in jeder Ebene drei Punkte der Kurve liegen, muß dies auch von der Ebene:

$$(17) \qquad \lambda L + \mu M + \nu N = 0$$

gelten. In der Tat ist die Bedingung, daß die vier Ebenen (2) und (17) durch einen Punkt gehen (I § 61, 3) in t vom 3. Grade. Sie muß aber die Wurzel $t = 0$ haben, da für $t = 0$ die Gleichung (17) eine Folge der Gleichungen (2) ist. Es tritt also noch für zwei andere Werte t_1 und t_2 ein, daß der Schnittpunkt der drei Ebenen (2) auf (17) liegt. Durch Multiplikation der Gleichungen (2) mit λ, μ, ν und Addition folgt aber wegen (17):

$$(18) \qquad t(\lambda L' + \mu M' + \nu N') = 0.$$

Für die beiden von $t = 0$ verschiedenen Werte t_1 und t_2, für die der Schnittpunkt von (2) auf (17) liegt, liegt er also auch auf:

$$(19) \qquad \lambda L' + \mu M' + \nu N' = 0,$$

also auf der Schnittlinie (9) der beiden Ebenen (17) und (19). Ebenso schließt man umgekehrt von (2) und (19) auf (17), wo dann $t = \infty$ einer der drei Punkte ist. Also liegen auf jedem Strahle λ, μ, ν der Kongruenz (11) zwei Punkte der Kurve (2).

I. *Jeder Strahl der von den Ebenenbündeln* (9) *erzeugten Kongruenz ist eine Sehne der von den Ebenenbüscheln* (2) *erzeugten Raumkurve 3. O.*[1])

II. Nach **6** *sind daher auch die Achsen der drei Ebenenbüschel* (2) *Sehnen der Kurve.*

Umgekehrt können die Parameter $\lambda : \mu : \nu$ der Ebene (17), die durch den Punkt S der Kurve in (15) geht, so bestimmt werden, daß die Ebene (17) durch zwei weitere Punkte t_1 und t_2 der Kurve geht. Durch diese geht dann, wie vorhin, auch die Ebene (19), also:

III. *Jede Sehne der von den Ebenenbüscheln* (2) *erzeugten Raumkurve ist ein Strahl der von den Ebenenbündeln* (9) *erzeugten Kongruenz.*

8. Die drei durch die Ebenenbündel erzeugten Linienflächen. Je zwei von den drei projektiven Ebenenbüscheln (2) erzeugen durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen eine *Linienfläche 2. O.* Die Gleichungen der drei so entstehenden Flächen sind:

$$(20) \quad f = MN' - NM' = 0, \; g = NL' - LN' = 0, \; h = LM' - ML' = 0.$$

1) Schröter, Oberfl. 2. O. (1880), S. 440.

Umgekehrt folgen aus dem gleichzeitigen Bestehen der drei Gleichungen (20) die Proportion:

$$(21) \qquad L : M : N = L' : M' : N'$$

oder mit einem Proportionalitätsfaktor t die Gleichungen (2). Daher ergibt sich mit Rücksicht auf **1**:

Die Raumkurve 3. O., die durch die drei Ebenenbüschel (1) *erzeugt wird, liegt auf jeder der drei Linienflächen 2. O.* (20); *und umgekehrt gehört jeder Punkt, der auf jeder der drei Flächen* (20) *liegt, der Raumkurve an* (vgl. den Spezialfall § 24, **11**).

9. Gemeinsame Erzeugende je zweier Linienflächen. Aus der Darstellung (16) der Achsen l, m, n geht hervor:

Je zwei der drei Linienflächen (20) *haben eine der drei Achsen l, m, n der Ebenenbüschel* (2) *gemein,* die nach **7**, II *Sehnen der Raumkurve* sind.

Infolge der Identitäten:

$$(22) \qquad Lf + Mg + Nh = 0, \quad L'f + M'g + N'h = 0$$

genügt jeder *gemeinsame Punkt* der Flächen g und h den beiden Gleichungen:

$$(23) \qquad Lf = 0, \quad L'f = 0.$$

Liegt ein solcher Punkt nicht auf der Achse l in (16), so liegt er auf der Fläche f, also nach **8** auf der Raumkurve. Liegt er aber auf der Achse l, die den beiden Flächen g und h gemeinsam ist, so kann er nur dann auf f liegen, wenn er einer der beiden Schnittpunkte der Achse l mit der Fläche f und damit, als Punkt der Raumkurve, einer der Endpunkte der Sehne l ist.

Die Raumkurve 3. O., die durch die drei Ebenenbüschel (2) *erzeugt wird, bildet zusammen mit der Achse eines der drei Ebenenbüschel* (2) *den vollständigen Durchschnitt der beiden Linienflächen, die dieses Ebenenbüschel mit je einem der beiden andern erzeugt.*

10. Die Erzeugenden eines Hyperboloides. Die beiden Regelscharen der Linienfläche $f = 0$ sind, falls diese eine eigentliche Linienfläche 2. O. ist, mit den Parametern t und $\mu : \nu$ (II § 159, 5):

$$(24) \begin{cases} M - tM' = 0, \\ N - tN' = 0; \end{cases} \qquad (25) \begin{cases} \mu M + \nu N = 0, \\ \mu M' + \nu N' = 0. \end{cases}$$

Die *erste Schar* (24) besteht aus den Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden letzten Ebenenbüschel (2). Eine solche Schnittlinie enthält nur einen Punkt der Raumkurve, den Schnittpunkt der

Linie mit der Ebene t des ersten Büschels (2). Die drei Ebenen t in (2) haben nämlich nach 2 nie mehr als einen Schnittpunkt.

Die *zweite Schar* (25) besteht aus Strahlen den Kongruenz (11), in denen sich entsprechende Ebenen 0, μ, ν der Ebenenbündel (9) schneiden, also nach 7 aus Sehnen.

Eine Erzeugende einer eigentlichen Fläche f, g oder h in (20) *ist Trefflinie oder Sehne, je nachdem sie der Regelschar zweier Ebenenbüschel* (2) *oder der Linienkongruenz der Ebenenbündel* (9) *angehört.*

11. Die Erzeugenden eines Kegels. Ist die Fläche f, etwa mit $N = M'$, ein Kegel:

$$MN' - N^2 = 0, \tag{26}$$

so liegt die Spitze:

$$S:\; M = 0,\; N' = 0,\; M' = N = 0 \tag{27}$$

auf allen drei Flächen (20), also auf der Raumkurve. Die Erzeugenden des Kegels werden unter Zusammenfall von (24) und (25) mit $\nu : \mu = -t$:

$$M - tM' = 0,\; M' - tN' = 0\; (M - tN = 0,\; N - tN' = 0). \tag{28}$$

Sie gehen alle durch den Punkt S der Raumkurve und werden außerdem von der 1. Ebene (2) in einem Punkte der Raumkurve geschnitten (der nur für die durch S gehende Ebene des 1. Büschels (2) in S fällt).

Eine Erzeugende einer Kegelfläche f, g oder h in (20) *ist stets Sehne, deren einer Endpunkt in die Spitze des Kegels fällt.*

12. Flächenbündel der Raumkurve. Da die Raumkurve auf jeder der drei Flächen (20) liegt, so liegt sie auch auf jeder Fläche des Bündels:

$$\varrho f + \sigma g + \tau h = 0 \tag{29}$$

bei willkürlichen Werten von $\varrho : \sigma : \tau$.

Liegt nun ein den beiden Flächen:

$$\varrho f + \sigma g + \tau h = 0,\; \varrho' f + \sigma' g + \tau' h = 0 \tag{30}$$

angehöriger Punkt nicht auf der Raumkurve, so daß für ihn nicht gleichzeitig die drei Gleichungen (20) bestehen, so ist für ihn:

$$f : g : h = \sigma\tau' - \tau\sigma' : \tau\varrho' - \varrho\tau' : \varrho\sigma' - \sigma\varrho' = \lambda : \mu : \nu, \tag{31}$$

wo λ, μ, ν zur Abkürzung eingeführt werden, und daher nach (22) auch:

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0,\; \lambda L' + \mu M' + \nu N' = 0. \tag{32}$$

Der Punkt liegt also auf einer Linie der Kongruenz (11) oder:

Irgend zwei Flächen des Bündels (29) *haben außer der Raumkurve stets noch eine Sehne der Raumkurve gemein* (§ 31, 5, II).

§ 37. Beziehung zwischen sieben Punkten der Raumkurve 3. Ordnung.

1. Bestimmung der Raumkurve durch sechs Punkte. *Die Raumkurve 3. O. ist durch sechs Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, bestimmt.*[1])

Denn sind 1, 2, 3, 4, 5, 6 sechs gegebene Punkte im Raume, so bestimmen die fünf Strahlen 12, 13, 14, 15, 16 einen Kegel 2. O. mit der Spitze 1 und die fünf Strahlen 21, 23, 24, 25, 26 einen Kegel 2. O. mit der Spitze 2. Beide Kegel haben die Erzeugende 12 gemein. Ihr übriger Durchschnitt ist eine Raumkurve 3. O., die durch die sechs gegebenen Punkte geht.

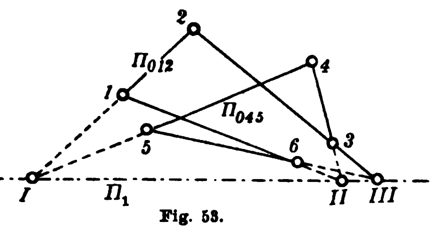


Fig. 53.

Zwischen *sieben* Punkten einer Raumkurve wird daher bereits eine Beziehung bestehen.

2. Der Pascalsche Satz für den Sehnenkegel. Irgend sieben Punkte der Raumkurve seien mit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, bezeichnet. Die sechs Strahlen 01, 02, 03, 04, 05, 06 gehören dem Sehnenkegel des Punktes 0 an und bilden daher, wie sechs Strahlen eines jeden Kegels 2. O., eine *Pascalsche sechskantige Pyramide.* Die drei Schnittlinien je zweier Gegenebenen der Pyramide:

$$(1) \qquad 012 \times 045 = \mathrm{I},\ 034 \times 061 = \mathrm{II},\ 056 \times 023 = \mathrm{III}$$

(Fig. 53 im Durchschnitt) liegen in einer Ebene Π_1, die durch die Spitze 0 des Kegels geht, der *„Pascalschen Ebene“* der Pyramide.

Die Gleichungen der Seitenebenen der Pyramide sind nach § 24, (28):

$$(2)\begin{cases} \Pi_{012} = (y_1 - \lambda_0 y_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)(y_2 - \lambda_0 y_3) + \lambda_1 \lambda_2 (y_3 - \lambda_0 y_4) = 0, \\ \Pi_{045} = (y_1 - \lambda_0 y_2) - (\lambda_4 + \lambda_5)(y_2 - \lambda_0 y_3) + \lambda_4 \lambda_5 (y_3 - \lambda_0 y_4) = 0, \quad \ldots, \quad \ldots, \end{cases}$$

wo die λ die Parameter der gleichnamigen Punkte der Kurve sind.

Setzt man nun (II § 37, (4)):

$$(3) \qquad \begin{cases} \varrho_1 = (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6), & \varrho_1' = (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_2), \\ \varrho_2 = (\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2), & \varrho_2' = (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_4), \\ \varrho_3 = (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4), & \varrho_3' = (\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_6), \end{cases}$$

1) M. Chasles, Aperçu hist. (1837), S. 403 (Note 33, (1)); Fr. Seydewitz, Arch. Math. Phys. 10 (1847), S. 211.

und führt ferner die Abkürzungen ein (II § 52, (19)):

$$(4)\quad \begin{cases} L_1 = \lambda_1\lambda_4 + \lambda_3\lambda_6 + \lambda_5\lambda_2, & L_2 = \lambda_3\lambda_5\lambda_4 + \lambda_5\lambda_1\lambda_6 + \lambda_1\lambda_3\lambda_2, \\ M_1 = \lambda_1\lambda_6 + \lambda_3\lambda_2 + \lambda_5\lambda_4, & M_2 = \lambda_3\lambda_5\lambda_6 + \lambda_5\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4, \\ N_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_5\lambda_6; & N_2 = \lambda_3\lambda_5\lambda_2 + \lambda_5\lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_6; \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} L_3 = \lambda_1\lambda_6\lambda_2 + \lambda_3\lambda_2\lambda_4 + \lambda_5\lambda_4\lambda_6, & L_4 = \lambda_3\lambda_5\lambda_6\lambda_2 + \lambda_5\lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_6, \\ M_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_6 + \lambda_5\lambda_6\lambda_2, & M_4 = \lambda_3\lambda_5\lambda_2\lambda_4 + \lambda_5\lambda_1\lambda_4\lambda_6 + \lambda_1\lambda_3\lambda_6\lambda_2, \\ N_3 = \lambda_1\lambda_4\lambda_6 + \lambda_3\lambda_6\lambda_2 + \lambda_5\lambda_2\lambda_4, & N_4 = \lambda_3\lambda_5\lambda_4\lambda_6 + \lambda_5\lambda_1\lambda_6\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3\lambda_2\lambda_4, \end{cases}$$

so drückt sich die Eigenschaft der Pascalschen Pyramide in den identischen Gleichungen aus (II § 52, (20)):

$$(5)\qquad \begin{cases} \varrho_1 \Pi_{012} - \varrho_1' \Pi_{045} + \Pi_1 = 0, \\ \varrho_2 \Pi_{034} - \varrho_2' \Pi_{061} + \Pi_1 = 0, \\ \varrho_3 \Pi_{056} - \varrho_3' \Pi_{023} + \Pi_1 = 0, \end{cases}$$

worin:

$$(6)\quad \Pi_1 = (M_1 - N_1)(y_1 - \lambda_0 y_2) + (M_2 - N_2 + M_3 - N_3)(y_2 - \lambda_0 y_3) + (M_4 - N_4)(y_3 - \lambda_0 y_4) = 0$$

die *Gleichung der Pascalschen Ebene* ist.

3. Erhaltung einer Sehne bei veränderter Spitze der Pyramide. Die Ebene (6) schneidet die Kurve:

$$(7)\qquad y_1 = \lambda^3,\ y_2 = \lambda^2,\ y_3 = \lambda,\ y_4 = 1$$

außer im Punkte λ_0 noch in zwei weiteren Punkten, deren Parameter λ_1', λ_1'' die Wurzeln der aus (6) mit der Substitution (7) entstehenden quadratischen Gleichung:

$$(8)\quad f_1(\lambda) = (M_1 - N_1)\lambda^2 + (M_2 - N_2 + M_3 - N_3)\lambda + (M_4 - N_4) = 0$$

sind. Da diese aber nicht von λ_0, sondern nach (4) nur von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ abhängt, so folgt:

Die Pascalsche Ebene der Pascalschen Pyramide 01, 02, ..., 06 dreht sich, während sich die Spitze λ_0 der Pyramide auf der Kurve bewegt, um eine den festen Punkten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ eigentümliche Sehne $\lambda_1' \lambda_1''$, für die:

$$(9)\quad 1 : -(\lambda_1' + \lambda_1'') : \lambda_1'\lambda_1'' = M_1 - N_1 : M_2 - N_2 + M_3 - N_3 : M_4 - N_4.$$

Wir nennen sie die *Cremonasche Sehne* des der Raumkurve einbeschriebenen Sechsseits $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6$.[1])

4. Involution der Endpunkte dreier Cremonascher Sehnen. Da bei den Gleichungen (5) nichts darüber vorausgesetzt ist, in wel-

1) Cremona, J. f. Math. 58 (1861), S. 144.

cher Reihenfolge sechs gegebene Punkte der Kurve mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ bezeichnet wurden, so *behält die der Kurve 3. O. einbeschriebene Pyramide 01, 02, ..., 06 den Charakter als Pascalsche bei jeder Vertauschung der sechs Kanten bei.*

Die einer *zyklischen Vertauschung der geraden Kanten* 02, 04, 06 entsprechenden Pascalschen Ebenen Π_1, Π_2, Π_3 haben infolge der Bezeichnung (4) neben (6) die Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} \Pi_2 = (N_1 - L_1)(y_1 - \lambda_0 y_2) + (N_2 - L_2 + N_3 - L_3)(y_2 - \lambda_0 y_3) \\ \quad + (N_4 - L_4)(y_3 - \lambda_0 y_4) = 0, \\ \Pi_3 = (L_1 - M_1)(y_1 - \lambda_0 y_2) + (L_2 - M_2 + L_3 - M_3)(y_2 - \lambda_0 y_0) \\ \quad + (L_4 - M_4)(y_3 - \lambda_0 y_4) = 0 \end{cases}$$

und gehen zufolge der Identität:

$$(11)\qquad \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 0$$

alle drei durch einen Strahl des Bündels am Punkte λ_0 („Steinersche Achse“, II § 52, **11**).

Auch für die quadratische Gleichung (8) und die einer zyklischen Vertauschung der L, M, N entsprechenden besteht die Identität:

$$(12)\qquad f_1(\lambda) + f_2(\lambda) + f_3(\lambda) = 0,$$

welche ausdrückt, daß die drei Endpunktpaare $\lambda_1', \lambda_1''; \lambda_2', \lambda_2''; \lambda_3', \lambda_3''$ der entsprechenden Cremonaschen Sehnen einem Büschel von Punktepaaren angehören, oder was dasselbe ist (II § 8, (53)):

Die Endpunkte der drei Cremonaschen Sehnen, die den drei der Raumkurve einbeschriebenen Sechsecken 123456, 143652, 163254 eigentümlich sind, gehören einer Involution von Kurvenpunkten an.

Die drei Sehnen selbst liegen daher nach § 31, **13** auf demselben durch die Kurve gehenden Hyperboloid.

5. Eigenschaft von sieben Kurvenpunkten. Da nach der 1. Gleichung (1) die Ebene 045 die Ebene 012 in der Geraden I schneidet, so trifft die in der Ebene 045 liegende Sehne 45 die Ebene 012 in einem Punkte A der Geraden I und ebenso die Sehne 12 die Ebene 045 in einem Punkte A' der Geraden I. Die Punkte $A = 012 \times 45$ und $A' = 045 \times 12$ liegen also auf I (Fig. 54). Die entsprechenden Folgerungen knüpfen sich an die 2. und 3. Gleichung (1). Da außerdem die Geraden I, II, III nach **1** in der Ebene Π_1 liegen und durch den Punkt 0 gehen, so folgt:

Fig. 54.

I. *Sind 0, 1, ..., 6 irgend sieben Punkte der Raumkurve, so bilden die dadurch mitbestimmten Punkte:*

$$(13)\qquad \begin{cases} A = 012 \times 45, & B = 034 \times 61, & C = 056 \times 23; \\ A' = 045 \times 12, & B' = 061 \times 34, & C' = 023 \times 56 \end{cases}$$

ein ebenes Brianschonsches Sechseck[1]) (Fig. 55).

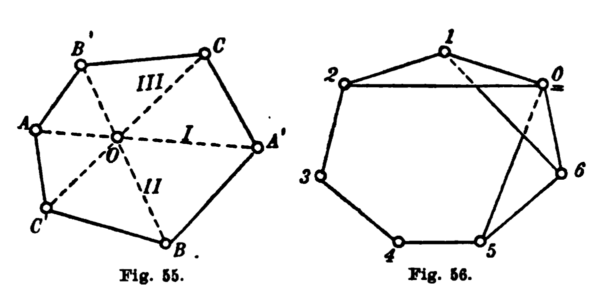


Fig. 55. Fig. 56.

Als Ausschnitt aus diesem Ergebnis heben wir noch hervor:

II. *Sind 0, 1, ..., 6 irgend sieben Punkte der Kurve, so liegen die drei Punkte:*

$$(14)\qquad A = 210 \times 45, \quad B' = 106 \times 34, \quad C = 065 \times 23$$

(Fig. 56), *in denen die Ebenen der drei aufeinanderfolgenden Seitenpaare 21, 10; 10, 06; 06, 65 des Siebenecks 01 ... 6 von den drei übrigen Seiten 45, 34, 23 geschnitten werden, in einer durch den Punkt 0 gehenden Ebene* Π_1.[2])

6. Konstruktion der Raumkurve 3. O. aus sechs Punkten. Durch zweimalige Anwendung des Satzes 5, II auf ein der Kurve einbeschriebenes Siebeneck 12 ... 7 ergibt sich, daß von den Punkten (Fig. 57; 58):

$$(15)\qquad 321 \times 56 = B, \; 217 \times 45 = D, \; 176 \times 34 = A;$$

$$(16)\qquad 176 \times 34 = A, \; 765 \times 23 = E, \; 654 \times 12 = C,$$

die drei ersten, B, D, A, in einer durch 1 gehenden Ebene A und die drei letzten, A, E, C, in einer durch 6 gehenden Ebene B liegen.

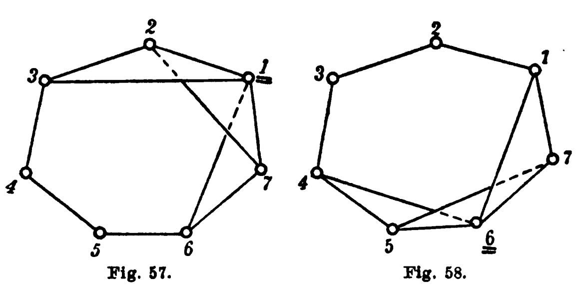


Fig. 57. Fig. 58.

Sind nun die 6 Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bekannt, so sind auch die Punkte:

$$(17)\qquad B = 123 \times 56, \; C = 456 \times 12$$

bekannt. Nun liegen in jeder beliebigen Ebene drei Punkte der Kurve, also auch in jeder durch die Sehne 16 gehenden Ebene Π, außer 1

1) Cremona, J. f. Math. 58 (1861), S. 144.
2) Chasles, Aperçu hist. (1837), S. 404 (Note 33, (3)).

und 6, noch ein unbekannter Punkt 7 der Kurve. Für diese Ebene Π ist dann der Punkt:

$$A = \Pi \times 34 \; (= 167 \times 34). \tag{18}$$

bekannt und damit auch die Ebenen:

$$\mathsf{A} = 1AB, \; \mathsf{B} = 6AC. \tag{19}$$

Da nun D in A und auf 45, E in B und auf 23 liegt, ist:

$$1AB \times 45 = D, \; 6AC \times 23 = E. \tag{20}$$

Da endlich D auch in 127 und E in 567 liegt, so liegt 7 auch in $12D$ und $56E$, sodaß:

$$7 = \Pi \times 12D \times 56E. \tag{21}$$

Durch Drehung der Ebene Π um 16 erhält man weitere Punkte 7 die Kurve.[1])

7. Begriff der Charakteristik eines einbeschriebenen Sechsecks. Alle durch die Raumkurve 3. O. gehenden Flächen gehören nach § 31, (6) dem Bündel:

$$\varrho f + \sigma g + \tau h = 0 \tag{22}$$

an, wo f, g, h die Bedeutung § 31, (5) haben. Soll eine solche Fläche durch zwei Sehnen $\lambda_1\lambda_2$ und $\lambda_3\lambda_4$ der Raumkurve gehen, müssen $\varrho : \sigma : \tau$ die Werte § 31, (30) haben.

Daher sind die Gleichungen *der drei Hyperboloide des Bündels* (22), *welche je zwei Gegenseitenpaare:*

$$12 \text{ und } 45, \quad 34 \text{ und } 61, \quad 56 \text{ und } 23 \tag{23}$$

eines der Raumkurve einbeschriebenen Sechsecks enthalten:

$$\begin{cases} H_1 = \varrho_1 f + \sigma_1 g + \tau_1 h = 0, \quad H_2 = \varrho_2 f + \sigma_2 g + \tau_2 h = 0, \\ \qquad H_3 = \varrho_3 f + \sigma_3 g + \tau_3 h = 0, \end{cases} \tag{24}$$

worin:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \lambda_1\lambda_2(\lambda_4 + \lambda_5) - \lambda_4\lambda_5(\lambda_1 + \lambda_2), \\ \varrho_2 &= \lambda_3\lambda_4(\lambda_6 + \lambda_1) - \lambda_6\lambda_1(\lambda_3 + \lambda_4), \\ \varrho_3 &= \lambda_5\lambda_6(\lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_2\lambda_3(\lambda_5 + \lambda_6), \\ \sigma_1 &= \lambda_1\lambda_2 - \lambda_4\lambda_5, \quad \tau_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5, \\ \sigma_2 &= \lambda_3\lambda_4 - \lambda_6\lambda_1, \quad \tau_2 = \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_6 - \lambda_1, \\ \sigma_3 &= \lambda_5\lambda_6 - \lambda_2\lambda_3, \quad \tau_3 = \lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_2 - \lambda_3. \end{aligned} \tag{25}$$

Da aber identisch:

---

1) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 174.

$$(26)\quad \begin{cases} (\lambda_3-\lambda_6)\varrho_1+(\lambda_5-\lambda_2)\varrho_2+(\lambda_1-\lambda_4)\varrho_3=0\\ (\lambda_3-\lambda_6)\sigma_1+(\lambda_5-\lambda_2)\sigma_2+(\lambda_1-\lambda_4)\sigma_3=0\\ (\lambda_3-\lambda_6)\tau_1+(\lambda_5-\lambda_2)\tau_2+(\lambda_1-\lambda_4)\tau_3=0 \end{cases}$$

und damit ebenfalls identisch:

$$(27)\quad (\lambda_3-\lambda_6)H_1+(\lambda_5-\lambda_2)H_2+(\lambda_1-\lambda_4)H_3=0,$$

so folgt:

Die drei Hyperboloide, welche durch die Raumkurve 3. O. und je ein Paar Gegenseiten eines ihr einbeschriebenen Sechseckes gehen, gehören einem Büschel an, haben also (§ 31, 6) alle drei eine Sehne gemein[1]), welche die „*Charakteristik*" des Sechsecks heißt.

8. Bestimmung der Charakteristik eines einbeschriebenen Sechsecks. Die Parameter der Endpunkte der Sehne, welche die beiden Hyperboloide H_1 und H_2 gemein haben, sind nach § 31, (23) durch die quadratische Gleichung bestimmt:

$$(28)\quad (\sigma_1\tau_2-\sigma_2\tau_1)\lambda^2+(\tau_1\varrho_2-\tau_2\varrho_1)\lambda+(\varrho_1\sigma_2-\varrho_2\sigma_1)=0.$$

Nun ist aber nach (25) mit Benutzung der Abkürzungen (4):

$$(29)\quad \begin{cases} \sigma_1\tau_2-\sigma_2\tau_1=(\lambda_1-\lambda_4)(M_1-N_1),\\ \tau_1\varrho_2-\tau_2\varrho_1=(\lambda_1-\lambda_4)(M_2-N_2+M_3-N_3),\\ \varrho_1\sigma_2-\varrho_2\sigma_1=(\lambda_1-\lambda_4)(M_4-N_4). \end{cases}$$

Die Endpunkte der gemeinsamen Sehne der drei Hyperboloide (24) *bestimmen sich aus der quadratischen Gleichung* (8).

Die Charakteristik des einbeschriebenen Sechsecks ist daher identisch mit der Cremonaschen Sehne, die nach **3** zu demselben Sechseck gehört.

9. Die Gruppe eines Hyperboloids. Die Funktionen $\varrho_1, \sigma_1, \tau_1$ in (25) sind sechswertige Funktionen der vier Elemente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5$ mit der Gruppe:

$$(30)\quad 1;\ (12);\ (45);\ (12)(45).$$

Den Substitutionen dieser Gruppe entsprechen die aus denselben sechs Punkten gebildeten Sechsecke:

$$(31)\quad 123456;\ \begin{cases} 213456\\ =126543; \end{cases}\qquad 123546;\ \begin{cases} 213546\\ =126453. \end{cases}$$

Zu diesen vier Sechsecken gehört also dasselbe Hyperboloid H_1, während die beiden anderen Hyperboloide H_2 und H_3 jeweils verschieden sind.

Je vier von den 60 Sechsecken der sechs Punkte haben unter ihren drei Hyperboloiden ein gemeinsames.

---

1) v. Staudt, Beitr. 1860, S. 320; Cremona, J. f. Math. 58 (1861), S. 145.

Die Anzahl der verschiedenen Hyperboloide ist daher $\frac{3.60}{4} = 45$.

Die vier Charakteristiken, die zu je vier solchen Sechsecken gehören, liegen alle vier auf dem gemeinsamen Hyperboloid.[1])

§ 38. Der Gegenpunkt von vier Punkten der Raumkurve.

1. Dritter Schnittpunkt einer Ebene. Soll die durch die drei Kurvenpunkte $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ gehende Ebene:

$$y_1 - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) y_2 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_0 + \lambda_0 \lambda_1) y_3 - \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 y_4 = 0$$

durch einen gegebenen Punkt y_k^0 des Raumes gehen, muß:

$$y_1^0 - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) y_2^0 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_0 + \lambda_0 \lambda_1) y_3^0 - \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 y_4^0 = 0$$

sein. Durch Auflösung dieser Gleichung nach λ_0 ergibt sich:

Ist eine Ebene durch zwei Punkte λ_1, λ_2 der Kurve und einen Punkt y_k^0 des Raumes bestimmt, so ist ihr dritter Schnittpunkt mit der Kurve:

$$(1) \qquad \lambda_0 = \frac{y_1^0 - (\lambda_1 + \lambda_2) y_2^0 + \lambda_1 \lambda_2 y_3^0}{y_2^0 - (\lambda_1 + \lambda_2) y_3^0 + \lambda_1 \lambda_2 y_4^0}.$$

2. Wiederholte Anwendung dieses Satzes. Ist nun $P = y_k$ ein beliebiger Punkt des Raumes und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ vier Kurvenpunkte, so sind nach (1) die dritten Schnittpunkte der Ebenen $P\lambda_1\lambda_2$ und $P\lambda_3\lambda_4$ mit der Kurve:

$$(2) \qquad \begin{cases} \lambda_{12} = \dfrac{y_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) y_2 + \lambda_1 \lambda_2 y_3}{y_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) y_3 + \lambda_1 \lambda_2 y_4} = \dfrac{A_{12}}{B_{12}}, \\ \lambda_{34} = \dfrac{y_1 - (\lambda_3 + \lambda_4) y_2 + \lambda_3 \lambda_4 y_3}{y_2 - (\lambda_3 + \lambda_4) y_3 + \lambda_3 \lambda_4 y_4} = \dfrac{A_{34}}{B_{34}} \end{cases}$$

und danach wieder nach (1) der dritte Schnittpunkt der Ebene $P\lambda_{12}\lambda_{34}$:

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{y_1 - (\lambda_{12} + \lambda_{34}) y_2 + \lambda_{12} \lambda_{34} y_3}{y_2 - (\lambda_{12} + \lambda_{34}) y_3 + \lambda_{12} \lambda_{34} y_4}, \text{ oder nach (2):} \\ \lambda = \dfrac{B_{12} B_{34} y_1 - (A_{12} B_{34} + A_{34} B_{12}) y_2 + A_{12} A_{34} y_3}{B_{12} B_{34} y_2 - (A_{12} B_{34} + A_{34} B_{12}) y_3 + A_{12} A_{34} y_4} = \dfrac{A_{12,34}}{B_{12,34}}. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(4) \qquad \begin{cases} p = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad q = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4, \\ r = -(\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3), \quad s = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4, \end{cases}$$

so wird:

---

1) Cremona, J. f. Math. 58 (1861), S. 145.

$$B_{12}B_{34} = y_2^2 + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_4)y_3^2 + sy_4^2 + py_2y_3 + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_3\lambda_4)y_2y_4 + ry_3y_4,$$

$$A_{12}A_{34} = y_1^2 + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_4)y_2^2 + sy_3^2 + py_1y_2 + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_3\lambda_4)y_1y_3 + ry_2y_3,$$

$$A_{12}B_{34} + A_{34}B_{12} = py_2^2 + ry_3^2 + \{2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_4) + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_3\lambda_4)\}y_2y_3 + py_1y_3 + 2y_1y_2 + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_3\lambda_4)y_1y_4 + ry_2y_4 + 2sy_3y_4.$$

Alsdann ergibt sich mit den § 31, (5) eingeführten Abkürzungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} A_{12,34} = (y_1+py_2+qy_3+ry_4)h - s(fy_3+gy_4), \\ B_{12,34} = (py_1+qy_2+ry_3+sy_4)f - (gy_1+hy_2). \end{cases}$$

3. Begriff des Gegenpunktes. Da die Ausdrücke $A_{12,34}, B_{12,34}$, die in ihrer ursprünglichen Definition in (3) der Verteilung der Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ in die Paare $\lambda_1\lambda_2$ und $\lambda_3\lambda_4$ entsprechen, nach (5) nur von den *symmetrischen* Funktionen (4) abhängen, so ist notwendig:

$$(6)\qquad A_{23,14} = A_{31,24} = A_{12,34} = A, \quad B_{23,14} = B_{31,24} = B_{12,34} = B.$$

Daher bleibt auch der Punkt λ in (3) für die Ebenenpaare $P\lambda_2\lambda_3$, $P\lambda_1\lambda_4$ und $P\lambda_3\lambda_1$, $P\lambda_2\lambda_4$ derselbe wie für das Ebenenpaar $P\lambda_1\lambda_2$, $P\lambda_3\lambda_4$ nämlich:

$$(7)\qquad \lambda = \frac{A}{B}.$$

Verbindet man einen Punkt P des Raumes mit vier Kurvenpunkten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, so erhält man ein vollständiges Vierkant mit drei Paaren von Gegenebenen $P\lambda_2\lambda_3$, $P\lambda_1\lambda_4$; $P\lambda_3\lambda_1$, $P\lambda_2\lambda_4$; $P\lambda_1\lambda_2$, $P\lambda_3\lambda_4$, welche die Kurve in drei weiteren Punktepaaren: $\lambda_{23}, \lambda_{14}$; $\lambda_{31}, \lambda_{24}$; $\lambda_{12}, \lambda_{34}$ schneiden. Alsdann haben die drei Ebenen $P\lambda_{23}\lambda_{14}$, $P\lambda_{31}\lambda_{24}$, $P\lambda_{12}\lambda_{34}$ alle drei denselben dritten Schnittpunkt λ mit der Kurve.

Dieser durch den Punkt P und die vier Kurvenpunkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bestimmte Punkt der Kurve heißt der *Gegenpunkt des Punktes P in bezug auf die vier Kurvenpunkte $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$.*

4. Kegelbüschel durch vier Strahlen $P\lambda_1, P\lambda_2, P\lambda_3, P\lambda_4$. Die durch einen festen Punkt $P = y_k$ des Raumes und zwei Kurvenpunkte λ_1, λ_2 bestimmte Ebene hat nach **1** in laufenden Koordinaten η_k die Gleichung:

$$(8)\qquad \Pi_{12} = \eta_1 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})\eta_2 + (\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1+\lambda_2)\lambda_{12})\eta_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_{12}\eta_4 = 0,$$

wo λ_{12} den Wert (2) hat. Bezeichnet nun Π_{12}^{λ} den aus Π_{12} durch die Substitution:

$$(9)\qquad \eta_1 = \lambda^3,\ \eta_2 = \lambda^2,\ \eta_3 = \lambda,\ \eta_4 = 1$$

hervorgehenden Ausdruck, so ist:

$$\Pi_{12}^{\lambda} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_{12}). \tag{10}$$

Bildet man dann nach (8) die entsprechenden Ausdrücke $\Pi_{34}, \Pi_{31}, \Pi_{24}$, so stellt die Gleichung:

$$\Pi_{31}\Pi_{24} + \mu\Pi_{12}\Pi_{34} = 0 \tag{11}$$

mit dem Parameter μ einen Büschel von Flächen 2. O. dar. Diese Flächen sind *Kegel mit der Spitze P*, da sie nach der Form der Gleichung (11) durch die Strahlen:

$$P\lambda_1 : \Pi_{31} = 0, \Pi_{12} = 0; \quad P\lambda_2 : \Pi_{24} = 0, \Pi_{12} = 0;$$
$$P\lambda_3 : \Pi_{31} = 0, \Pi_{34} = 0; \quad P\lambda_4 : \Pi_{24} = 0, \Pi_{34} = 0$$

gehen.

Die Gleichung (11) *stellt somit den Büschel aller der Kegel 2. O. mit der Spitze P dar, welcher durch die vier Strahlen* $P\lambda_1, P\lambda_2, P\lambda_3, P\lambda_4$ *bestimmt ist.*

5. Übrige Schnittpunkte des Kegels mit der Raumkurve. Die sechs Schnittpunkte eines Kegels (11) mit der Raumkurve (§ 31, **1**) bestimmen sich aus der Gleichung 6. Grades in λ, welche aus (11) durch die Substitution (9) entsteht, also nach (10), mit Unterdrückung der vier bekannten Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, aus:

$$(\lambda - \lambda_{31})(\lambda - \lambda_{24}) + \mu(\lambda - \lambda_{12})(\lambda - \lambda_{34}) = 0. \tag{12}$$

Ein Kegel μ *des Büschels* (11) *schneidet die Raumkurve, außer in den vier festen Punkten, noch in zwei weiteren Punkten, deren Parameter* λ' *und* λ'' *die Wurzeln der quadratischen Gleichung:*

$$(1+\mu)\lambda^2 - \{(\lambda_{31} + \lambda_{24}) + \mu(\lambda_{12} + \lambda_{34})\}\lambda + (\lambda_{31}\lambda_{24} + \mu\lambda_{12}\lambda_{34}) = 0 \tag{13}$$

sind, so daß:

$$\lambda' + \lambda'' = \frac{(\lambda_{31} + \lambda_{24}) + \mu(\lambda_{12} + \lambda_{34})}{1+\mu}, \quad \lambda'\lambda'' = \frac{\lambda_{31}\lambda_{24} + \mu\lambda_{12}\lambda_{34}}{1+\mu}. \tag{14}$$

6. Dritter Schnittpunkt der Ebene $P\lambda'\lambda''$ mit der Raumkurve. Der dritte Schnittpunkt der Ebene $P\lambda'\lambda''$ mit der Raumkurve ist daher:

$$\lambda = \frac{y_1 - (\lambda' + \lambda'')y_2 + \lambda'\lambda'' y_3}{y_2 - (\lambda' + \lambda'')y_3 + \lambda'\lambda'' y_4}$$
$$= \frac{\{y_1 - (\lambda_{31} + \lambda_{24})y_2 + \lambda_{31}\lambda_{24}y_3\} + \mu\{y_1 - (\lambda_{12} + \lambda_{34})y_2 + \lambda_{12}\lambda_{34}y_3\}}{\{y_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{24})y_3 + \lambda_{31}\lambda_{24}y_4\} + \mu\{y_2 - (\lambda_{12} + \lambda_{34})y_3 + \lambda_{12}\lambda_{34}y_4\}}$$

oder mit Substitution der Werte (2) von $\lambda_{12}, \lambda_{34}$ und der entsprechenden von $\lambda_{31}, \lambda_{24}$ und mit Rücksicht auf (3) und (6):

$$\lambda = \frac{\frac{A}{B_{31}B_{24}} + \mu \frac{A}{B_{12}B_{34}}}{\frac{B}{B_{31}B_{24}} + \mu \frac{B}{B_{12}B_{34}}} = \frac{A}{B}. \tag{15}$$

Die Unabhängigkeit dieses Punktes von μ und seine Übereinstimmung mit (7) gibt den Satz:

Die vier Strahlen $P\lambda_1, P\lambda_2, P\lambda_3, P\lambda_4$, *die einen festen Punkt P des Raumes mit vier festen Punkten* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *der Raumkurve verbinden, bestimmen einen Büschel von Kegeln 2. O. Der laufende Kegel des Büschels schneidet die Raumkurve, außer in* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, *noch in zwei weiteren Punkten* λ', λ'', *deren Verbindungsebene* $P\lambda'\lambda''$ *mit P, außer* λ', λ'', *einen festen dritten Schnittpunkt* λ *mit der Kurve hat, den Gegenpunkt des Punktes P mit Bezug auf die Punkte* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.[1])

7. Involution der Schnittpunktpaare. Durch Elimination von μ aus den beiden Gleichungen (14) geht hervor:

$$\begin{cases} (\lambda_{31} + \lambda_{24} - \lambda_{12} - \lambda_{34})\lambda'\lambda'' - (\lambda_{31}\lambda_{24} - \lambda_{12}\lambda_{34})(\lambda' + \lambda'') \\ \qquad + \lambda_{31}\lambda_{24}(\lambda_{12} + \lambda_{34}) - \lambda_{12}\lambda_{34}(\lambda_{31} + \lambda_{24}) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

und damit nach § 30, (4):

Die Punktepaare, in denen die Kegel μ *des Büschels* (10) *die Raumkurve schneiden, bilden eine Involution auf der Kurve.*[2])

---

1) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 294; vgl. Salmon-Fiedler, Höh. Kurven (1873), S. 162.

2) Cremona, Ann. di mat. 1 (1858), S. 294.

Sachverzeichnis.

Anmerkung zu § 26, 10.

Sind in § 26, (12) die beiden Parameter λ_1, λ_2 konjugiert komplex:

(1) $$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

so sind die Koordinaten $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ der beiden entsprechenden Kurvenpunkte P_1, P_2 ebenfalls von der Form:

(2) $$y_k^{(1)} = A_k + B_k i, \quad y_k^{(2)} = A_k - B_k i, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

und die eines Punktes P der Verbindungslinie in § 26, (13):

(3) $$y_k = A_k(1-t) + B_k(1+t)i.$$

Der Punkt P ist daher reell, wenn der mit dem Parameter:

(4) $$t = r + si$$

gebildete Quotient:

(5) $$\frac{1+t}{1-t}i = \frac{-2s + (1 - r^2 - s^2)i}{(1-r)^2 + s^2}$$

reell, also:

(6) $$r^2 + s^2 = 1$$

oder t eine komplexe Einheit ist, etwa:

(7) $$t = e^{\varphi i}.$$

Dann sind auch *die drei Wurzelwerte:*

(8) $$\tau = \varrho + \sigma i = \sqrt[3]{t} = e^{\frac{\varphi + 2h\pi}{3}i}, \quad h = 0, 1, 2,$$

komplexe Einheiten.

Andererseits ist der Wert von λ in § 26, (15) mit (1) und (8):

(9) $$\lambda = \frac{\alpha + \beta i - (\alpha - \beta i)(\varrho + \sigma i)}{1 - (\varrho + \sigma i)} = \frac{\alpha(1-\varrho)^2 + \alpha\sigma^2 - 2\beta\sigma + \beta(1 - \varrho^2 - \sigma^2)i}{(1-\varrho)^2 + \sigma^2}$$

reell, wenn:

$$\varrho^2 + \sigma^2 = 1,$$

also τ eine komplexe Einheit ist. Danach folgt neben § 26, 10:

Geht durch einen Punkt des Raumes eine uneigentliche Sehne, so gehen durch ihn drei reelle Schmiegungsebenen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Gundelfinger, S., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausg. von Fr. Dingeldey. Mit Fig. und einem Anhange, enthaltend Aufgaben und weitere Ausführungen. VIII, 434 S. gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 12.—

Heffter, L., u. C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Bände. I. Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Textfiguren. XVI, 526 S. gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 14.— [II. Band in Vorbereitung.]

Hesse, O., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 4. Auflage, revidiert und ergänzt von S. Gundelfinger. VIII, 251 S. gr. 8. 1906. geb. n. ℳ 6.—

Hochheim, A., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. 3 Hefte, in je 2 Teilen. gr. 8. geh.

Heft I: Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. 4., vermehrte Auflage, bearbeitet von O. Jahn und Fr. Hochheim. 1911
A. Aufgaben. VI, 104 S. geb. n. ℳ 2.40.
B. Auflösungen. II, 136 S. geb. n. ℳ 2.60.

Heft II: Die Kegelschnitte. Abteilung I. 3., vermehrte Auflage, bearbeitet von O. Jahn und Fr. Hochheim.
A. Aufgaben. IV, 90 S. 1906. geb. n. ℳ 1.80.
B. Auflösungen. Mit Figuren. 106 S. 1908. geh. n. ℳ 1.60, geb. n. ℳ 2.20.

Heft III: Die Kegelschnitte. Abteilung II, 2. Auflage 1911.
A. Aufgaben. 69 S. geh. n. ℳ 1.20, geb. n. ℳ 1.80.
B. Auflösungen. 100 S. geh. n. ℳ 1.80, geb. n. ℳ 2.40.

Klein, F., autographierte Vorlesungshefte. 4. geh.
Höhere Geometrie. Unveränderter Abdruck 1907.
Heft 1, 566 Seiten (W.-S. 1892/93)
Heft 2, 388 Seiten (S.-S. 1893) } zusammen n. ℳ 15.—

Loria, G., spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte. Autorisierte deutsche Ausgabe von Fr. Schütte. In 2 Bänden. gr. 8. 2. Auflage.

I. Band: Die algebraischen Kurven. Mit 142 Fig. XVIII, 488 S. 1910. geh. n. ℳ 16.50, in Leinw. geb. n. ℳ 18 —

II. „ Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven. Mit 80 Fig. VIII, 384 S. 1911. geh. n. ℳ 12.50, geb. ℳ 14.—

Mehmke, R., Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung. In 2 Bänden. I. Band: Punktrechnung. Erster Teilband. Mit 152 Fig. VIII, 394 S. gr. 8. 1913. geh. n. ℳ 14.—

Repertorium der höheren Mathematik. Von E. Pascal. 2., völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe von P. Epstein, R. Rothe und H. E. Timerding. 2 Bände in 4 Teilen: I, 1. Analysis. geb. ℳ 10.— II, 1. Geometrie. geb. ℳ 10.— [I. 2 und II. 2 in Vorb.]

Runge, C., analytische Geometrie der Ebene. Mit 75 Fig. IV, 198 S. gr. 8. 1908. geb. n. ℳ 6.—.

Salmon, G., analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von W. Fiedler. 2 Teile. gr. 8. geh. n. ℳ 17.—, geb n. ℳ 19.—

I. Teil: 7., verbesserte Auflage. XXXIV, 444 S. 1907. geb. n. ℳ 10.—

II. „ 6. Aufl. XXIV u. S. 443—854. 1903. geh. n. ℳ 8.—, geb. n. ℳ 9.—

—— analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. 2., verbesserte Auflage. XVI, 508 S. gr. 8. 1882. geh. n. ℳ 11.20, geb. n. ℳ 12.20.

—— analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearb. v. W. Fiedler. 2 Tle. gr. 8.

I. Teil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. 4., verbesserte Auflage. Mit Holzschnitten. XXIV, 448 S. 1898. geh. n. ℳ 8.—, geb. n. ℳ 9.—

II. „ Analytische Geometrie der Kurven im Raume, der Strahlensysteme und der algebraischen Flächen. 3. Auflage. Mit Holzschnitten. LXXII, 686 S. 1880. geh. n. ℳ 16.—, geb. n. ℳ 17.40.

Sauerbeck, P., Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven. Mit 76 Abb. VI, 166 S. gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8.—